ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

គណិតវិទ្យា

មេរៀនសង្ខេប និង លំហាត់គំរូ

សម្រាប់ជាជំនួយដល់សិស្សថ្នាក់ទី ១២

២០១៤-២០១៥

facebook.com/moeys.gov.kh www.moeys.gov.kh google.com/+moeys

អារម្ភកថា

នេះគ្រាន់តែជាជំនួយដល់អ្នកសិក្សាគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ ប៉ុន្តែវាពុំមែនជាឯកសារពេញលេញសម្រាប់កម្មវិធីសិក្សាថ្នាក់ទី១២ទាំងមូលនោះទេ។

ក្នុងជំពូកនីមួយៗនៃមេរៀនយើងបានចែកវាជាពីរផ្នែក

ផ្នែកទី I: សង្ខេបមេរៀនដើម្បីឲ្យអ្នកសិក្សាចងចាំនូវអ្វីដែលរៀនរួចជានិយមន័យ និងទ្រឹស្តីបទសំខាន់ៗសម្រាប់ធ្វើលំហាត់។

ផ្នែកទី II: លំហាត់គំរូ

- យើងបានបញ្ចូលវិធីសាស្ត្រមូលដ្ឋានសម្រាប់ធ្វើលំហាត់ងាយៗទៅតាមលំដាប់ទម្រង់ជាការពន្យល់ដើម្បីអនុវត្តន៍។
- ក្នុងការសិក្សាអ្នកមិនត្រូវព្យាយាមមើលចម្លើយរបស់លំហាត់គំរូទេ។ អ្នកសិក្សាត្រូវអានដោយយកចិត្តទុកដាក់នូវប្រធានលំហាត់នីមួយៗស្វែងរកវិធីក្នុងការដោះស្រាយនៅក្នុងក្រដាសព្រាងតាមរបៀបផ្សេងៗ ហើយដាក់សំណួរខ្លួនឯងថា តើលំហាត់នេះអាចដោះស្រាយបានប៉ុន្មានរបៀប និងប្រើនិយមន័យ ឬទ្រឹស្តីបទអ្វីខ្លះ? ធ្វើបែបនេះទើបអ្នកអាចយល់បានស៊ីជម្រៅ និងចងចាំបាននូវមេរៀន ឬរូបមន្តដែលអ្នកបានរៀនរួច។
- ក្រោយពេលធ្វើដំណោះស្រាយលើក្រដាសព្រាងរួច ត្រូវចម្លងដោយហ្មត់ចត់លើក្រដាសស្អាតដោយសរសេរឲ្យមានរបៀបរៀបរយចប់សព្វគ្រប់ ទើបផ្ទៀងផ្ទាត់ជាមួយចម្លើយដែលមាន។ ធ្វើបែបនេះអ្នកនឹងទទួលជោគជ័យហើយអាចបានចម្លើយដែលល្អជាង និងខ្លី ជាងចម្លើយដែលមានក្នុងគំរូទៅទៀត។

ដើម្បីឲ្យសៀវភៅនេះកាន់តែល្អប្រសើរ យើងខ្ញុំរង់ចាំទទួលការរិះគន់ និងកែលម្អបន្ថែមអំពីលោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និងអ្នកសិក្សាទាំងឡាយដោយក្តីសោមនស្សរីករាយបំផុត។

ក្រុមអ្នករៀបរៀង

វិធីសាស្ត្រសម្រាប់ដោះស្រាយវិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា

I. ផ្ដើមនៃវិញ្ញាសា

- អានដោយយកចិត្តទុកដាក់ និងយឺតៗនូវវិញ្ញាសាទាំងមូល។
- កំណត់ពេលវេលាអតិបរមាដែលអ្នកត្រូវប្រើសម្រាប់ដោះស្រាយ សរសេរចូល និងមើលឡើងវិញរួមជាមួយអត្រាពិន្ទុនៅក្នុងវិញ្ញាសា។
- យើងត្រូវចាប់ផ្ដើមជាមួយលំហាត់ណាដែលអ្នកយល់ថាងាយ។

II. ពេលធ្វើវិញ្ញាសា

- សាកល្បងដោះស្រាយក្នុងក្រដាសព្រាង។ ក្រោយពេលដោះស្រាយចប់ ចម្លងចូលក្នុងក្រដាសកិច្ចការ។ បើមិនទាន់ដោះស្រាយចប់ត្រូវមើលឡើងវិញក្នុងក្រដាសព្រាង បើយល់ថាត្រឹមត្រូវហើយបន្តចម្លងដោយផ្ចិតផ្ចង់ជាពិសេសចម្លើយនៃរាល់សំណួរមុនដែលអាចជួយអ្នកឲ្យដោះស្រាយសំណួរបន្ត។
- បើអ្នកប្រទះនឹងសំណួរណាដែលមិនអាចដោះស្រាយបានត្រូវរក្សាក្រដាសសក្នុងក្រដាសកិច្ចការ និងបន្តដោះស្រាយសំណួរបន្ទាប់នៃលំហាត់ដោយអនុម័តលទ្ធផលផ្ដល់ពីខាងលើ។
- សូមកុំភ្លេចថារាល់ចម្លើយត្រូវតែមានការពន្យល់។

III. ការរៀបចំក្រដាសកិច្ចការ

- សរសេរចម្លើយតាមសំណួរនីមួយៗដោយបង្ហាញលទ្ធផលដែលទទួលបានឲ្យច្បាស់លាស់ និងគោរពតាមការកំណត់សរសេររបស់វិញ្ញាសា។
- សរសេរឲ្យបានច្បាស់ ជៀសវាងការមើលមិនយល់។
- ការសង់ក្រាបត្រូវគោរពតាមឯកតាដែលបានកំណត់។ គេមិនត្រូវភ្លេចថាបន្ទាត់ប៉ះអាចជួយឲ្យគូរក្រាបបានល្អ។
- រូបធរណីមាត្រត្រូវដៅចំណុចចាំបាច់ដែលមាននៅក្នុងសម្រាយបំភ្លឺរបស់អ្នក។

បញ្ជីអត្ថបទ

លីមីតនៃអនុគមន៍

I. មេរៀនសង្ខេប

1. ប្រមាណវិធីលើលីមីត

បើ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	$L\neq 0$	$L\neq 0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
បើ $\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$M\neq 0$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
នោះ $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$	$L+M$	L	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	$+\infty$	$?$	$-\infty$
នោះ $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)$	$L-M$	L	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	$?$	$+\infty$	$?$
នោះ $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$	$L\cdot M$	0	$\pm\infty$	$?$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
នោះ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{L}{M}$	$\pm\infty$	0	0	$?$	$?$	$?$	$?$

កំណត់សម្គាល់ : រាងមិនកំណត់គឺ : $\ll \infty-\infty \gg ; \ll \infty\times 0 \gg ; \ll \dfrac{0}{0} \gg ; \ll \dfrac{\infty}{\infty} \gg$

2. លីមីតនៃអនុគមន៍បណ្តាក់

និយមន័យ : យើងមាន u ជាអនុគមន៍កំណត់លើ I និង g ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $u(I)$។

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "u"] \arrow[rr, bend right, mapsto, "g\circ u"'] & u(x) \arrow[r, mapsto, "g"] & g(u(x)) \end{tikzcd}$$

អនុគមន៍បណ្តាក់នៃ u ដោយ g គេសរសេរ $g\circ u$ ជាអនុគមន៍កំណត់លើ I ដោយ $(g\circ u)(x)=g(u(x))$ ។

បើ u និង g ជាអនុគមន៍ដែលមាន $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x)=\beta$ និង $\lim\limits_{x\to\beta} g(x)=\gamma$ នោះ $\lim\limits_{x\to\alpha}(g\circ u)(x)=\gamma$ ។

3. លីមីតតាមការប្រៀបធៀប

- បើ $f(x)\geq g(x)$ និង បើ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ នោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
- បើ $f(x)\leq g(x)$ និង បើ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ នោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$
- បើ $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ និង បើ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=L$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=L$ នោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$
- បើ $\left|f(x)-L\right|\leq g(x)$ និង បើ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ នោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$

កំណត់សម្គាល់ : គេអាចបកស្រាយដូចគ្នាកាលណា $x \to -\infty$ ឬ កាលណា $x \to a$ (a ជាចំនួនពិត)

4. លីមីតនៃអនុគមន៍ជួបប្រទះញឹកញាប់

លីមីតត្រង់ $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

លីមីតត្រង់ **0** : n ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន និងគូ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$

n ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន និងសេស $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$

n ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន និងសេស $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$

5. លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

6. លីមីតនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

បើ $n>0$ នោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$

7. លីមីតនៃអនុគមន៍លោការីតនេពែ

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x \ln x = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

បើ $n>0$ នោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$

II. លំហាត់គំរូ

កំណត់សម្គាល់ : អ្នកសិក្សាត្រូវខំប្រឹងដោះស្រាយលំហាត់ដោយខ្លួនឯង ចំណែកចម្លើយសម្រាប់តែផ្ទៀងផ្ទាត់។

1. $f(x)=\dfrac{2x^2-x+3}{x^2+1}$; គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ចម្លើយ

a. ចំពោះគ្រប់ $x\neq 0$; $f(x)=\dfrac{2x^2-x+3}{x^2+1}=\dfrac{x^2\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}$

b. គេបាន $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)=2$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=1$

វិបាក $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

2. $f(x)=\dfrac{1-x}{(1+x)^2}$

គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$

ចម្លើយ

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x}{(1+x)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x}{1+2x+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x}\right)=0$$

ខ. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x}{(1+x)^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x}{1+2x+x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{x}\right)=0$$

គ. $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1-x}{(1+x)^2}$

$\lim\limits_{x\to-1}(1-x)=2$ និង $\lim\limits_{x\to-1}(1+x)^2=0$ ដោយ $(1+x)^2>0$ ចំពោះ $x\neq 0$

ដូច្នេះ $\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$

3.គណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; ខ. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^3-8}$; គ. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$

ចម្លើយ

ក. $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

ខ. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^3-8}$

យើងដឹងថា $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

ដូច្នេះ $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$

តាង $$f(x)=\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^3-8} = \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \frac{x+2-4}{(x-2)(x^2+2x+4)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \frac{x-2}{(x-2)(x^2+2x+4)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \frac{1}{(x^2+2x+4)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^3-8} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{(x^2+2x+4)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{48}$$

គ. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$

តាង $$f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x} = \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{\sin x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \frac{2x}{\sin x\,(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{x}{\sin x}\cdot\frac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{2}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} \quad ; \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1\right)$$

$$=1$$

4. គណនា $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

យើងឃើញ $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-1}=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{x^2-1}\right)=-\infty$

ជារាងមិនកំណត់ $\infty-\infty$

$x\to+\infty$ យើងឧបមា $x\geq 1$

$$\sqrt{4x^2-1}=\sqrt{x^2\left(4-\frac{1}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}$$

ដោយ $x\geq 1$; $|x|=x$ និង $\sqrt{4x^2-1}=x\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}$

ដូចគ្នាដែរ $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$

ដូច្នេះ $f(x)=\sqrt{4x^2-1}-\sqrt{x^2-1}=x\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$

$$=x\left(\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$$

$\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ និង $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=2-1=1$

វិបាក $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

5.កំណត់លីមីតត្រង់ -1 នៃអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{-1,+1\}$ ដោយ $f(x)=\frac{3x-1}{x^2-1}$

ក. $\lim_{x\to-1}(3x-1)=-4$ **;** $\lim_{x\to-1}\left(x^2-1\right)=0$

ខ.សិក្សាសញ្ញា នៃ x^2-1 ដោយប្រើតារាងខាងក្រោម

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

គ. $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\left(x^2-1\right)=0^+$ និង $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\left(x^2-1\right)=0^-$

វិបាក $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)=-\infty$ និង $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=+\infty$

6. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

គណនា

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ខ. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ គ. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

ចម្លើយ

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

ខ. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

គ. $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3-x^2+x-1\right)=0$ និង $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$

លីមីតនេះមានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}=\frac{x^2(x-1)+(x-1)}{x-1}=\frac{(x-1)\left(x^2+1\right)}{x-1}$$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+1\right)=2$

7. គេមានអនុគន៍ $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+(a-1)x+3-3a}{x^2-4x+3}$ (a ជាចំនួនពិតដែលឲ្យ)

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ខ. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ គ. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ឃ. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

ចម្លើយ

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

ខ. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$

គ. តាង $f(x)=\dfrac{N(x)}{D(x)}$ ដែល $N(x)=x^3-3x^2+(a-1)x+3-3a$

$$D(x)=x^2-4x+3$$

$\lim\limits_{x\to 3}N(x)=0$ និង $\lim\limits_{x\to 3}D(x)=0$; លីមីតនេះមានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$N(x)=x^2(x-3)+(a-1)x+3(1-a)=x^2(x-3)+(a-1)(x-3)$$

$$=(x-3)\left(x^2+a-1\right)$$

$$D(x)=(x-3)(x-1)$$

$$\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(x^2+a-1\right)}{(x-3)(x-1)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+a-1}{x-1}=\frac{8+a}{2}$$

ឃ. $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+a-1\right)=a$ និង $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ មានសញ្ញាអាស្រ័យទៅសញ្ញានៃ a និង $x-1$

- បើ $a>0$ $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+a-1}{x-1}=+\infty$

  $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+a-1}{x-1}=-\infty$
- បើ $a<0$ $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+a-1}{x-1}=-\infty$

  $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+a-1}{x-1}=+\infty$
- បើ $a=0$ $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$

8. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^3+2\sqrt{x}+2x-5}{x+\sqrt{x}}$ កំណត់លើ $(0,+\infty)$

ក. បង្ហាញថា ចំពោះ $x\geq\dfrac{5}{2}$ គេបាន $f(x)\geq\dfrac{x^3}{x+\sqrt{x}}$

ខ. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x+\sqrt{x}}$

គ. ទាញយកតម្លៃនៃ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

ចម្លើយ

ក. បើ $x\geq\frac{5}{2}$ គេបាន $2x-5\geq 0$ និង $2\sqrt{x}+\left(2x-5\right)\geq 0$

(ព្រោះ $2\sqrt{x}>0$ និង $2x-5\geq 0$) ដូច្នេះ $x^3+2\sqrt{x}+2x-5\geq x^3$

ដោយ $x+\sqrt{x}>0,\dfrac{x^3+2\sqrt{x}+2x-5}{x+\sqrt{x}}\geq\dfrac{x^3}{x+\sqrt{x}}$

ខ. ចំពោះ $x\geq\frac{5}{2};\dfrac{x^3}{x+\sqrt{x}}=\dfrac{x^3}{x\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}=\dfrac{x^2}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ និង

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=1$ ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}=+\infty$

គ. យើងឃើញថាចំពោះ $x\geq\frac{5}{2}$, $f\left(x\right)\geq\dfrac{x^2}{x+\sqrt{x}}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x+\sqrt{x}}=+\infty$ យើងអាចទាញបានថា $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$

9. លំហាត់គំរូ

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{5x}$ យើងតាង $X=5x$

គេបាន $\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\sin X}{X}=1$ ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{5x}=1$

ខ. គណនា $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{-2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$

តាង $X=x-\frac{\pi}{4}$; $x\to\frac{\pi}{4}$ នោះ $X\to0$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=-2\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\sin X}{X}=-2\times1=-2$

គ.គណនា $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 5x}{\sqrt{5}-\sqrt{x+5}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(-2\sin 5x)\left(\sqrt{5}+\sqrt{x+5}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{x+5}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{x+5}\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(-2\sin 5x)\left(\sqrt{5}+\sqrt{x+5}\right)}{-x}$$

$$=\lim_{x\to 0}(10\times\frac{\sin 5x}{5x})\cdot\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{5}+\sqrt{x+5}\right)=10\times 2\sqrt{5}=20\sqrt{5}$$

ឃ.គណនា $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sqrt{3}\cos x-\sin x}{x-\frac{\pi}{3}}$

យើងបាន $\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}\sin x\right)=2\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\cos x-\cos\dfrac{\pi}{3}\sin x\right)$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=-2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}\cos x-\sin x}{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(-2\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}\right)$$

តាង $X=x-\dfrac{\pi}{3};x\to\dfrac{\pi}{3}$ នាំឲ្យ $X\to 0$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sqrt{3}\cos x-\sin x}{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}=\lim\limits_{X\to 0}\left(-2\dfrac{\sin X}{X}\right)=-2\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\sin X}{X}=-2$

10. លំហាត់គំរូ

ក.គណនា $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{2x}$ យើងតាង $X=2x$

$$\lim_{X\to 0}\frac{\cos X-1}{X}=\lim_{X\to 0}\frac{-(1-\cos X)}{X}=-\lim_{X\to 0}\frac{1-\cos X}{X}=0$$

ខ.គណនា $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$

យើងតាង $X=x-\frac{\pi}{2}$; បើ $x\to\frac{\pi}{2}$ នាំឲ្យ $X\to 0$

ដូច្នេះ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\left(x-\frac{\boldsymbol{\pi}}{2}\right)-1}{\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{2}-x\right)}=\lim_{X\to 0}\frac{\cos X-1}{-X}=\lim_{X\to 0}\frac{1-\cos X}{X}=0$

គ. គណនា $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}$

$\cos x+1\neq 0$ ឬ $\cos x\neq -1$ ឬ $x\neq \pi+2k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$

យើងបាន $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$

11.គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x-1}{1+\sin x}$ ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x+\sin x}{x}$

ចម្លើយ

ក. តាង $f(x)=\frac{\sin^2 x-1}{1+\sin x}$ ត្រង់ $-\frac{\pi}{2}$ យើងឃើញមានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងបាន $f(x)=\frac{\sin^2 x-1}{1+\sin x}=\frac{(\sin x-1)(\sin x+1)}{1+\sin x}$

$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x-1)(\sin x+1)}{\sin x+1}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)$

ដូច្នេះ $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x)=-2$

ខ. តាង $f(x)=\frac{2\tan x+\sin x}{x}$, ត្រង់ 0 យើងឃើញមានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{2\tan x}{x}+\frac{\sin x}{x}\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

ដូច្នេះ $\lim_{x\to 0} f(x)=2+1=3$

12. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=2x-x\sin x$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។

ក. គេកត់សម្គាល់ឃើញថាចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R},-1\le\sin x\le 1$, រកអនុគមន៍ $g(x)$ ដែលគ្រប់ $x\ge 0, f(x)\ge g(x)$ ។ ទាញយក $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ។

ខ. រកអនុគមន៍ $h(x)$ ដែលគ្រប់ $x\le 0, f(x)\le h(x)$ ។ ទាញយក $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ។

ចម្លើយ

ក. យើងបាន $f(x)=2x-x\sin x$

ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}:-1\le\sin x\le 1$

$$-1\le-\sin x\le 1$$

បើ $x\ge 0$ គេបាន : $-x\le(-x\sin x)\le x$

$$2x-x\le 2x-x\sin x\le 2x+x$$

$$x\le f(x)\le 3x$$

ដូច្នេះ $g(x)$ ដែលត្រូវរកគឺ $g(x)=x$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$, យើងទាញបាន $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ខ. បើ $x\le 0$ គេបាន $-1\le\sin x\le 1$ ដោយគុណ $-x$ ដែលវិជ្ជមានគេបាន :

$x\le -x\sin x\le -x$ ឬ $2x+x\le 2x-x\sin x\le 2x-x$ ឬ $3x\le 2x-x\sin x\le x$

ដូច្នេះ $h(x)$ ដែលត្រូវរកគឺ $h(x)=x$

$\lim_{x\to-\infty} h(x)=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$ យើងទាញបាន $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

13. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ កំណត់លើ $\mathbb{R}^*$ ។ ដោយកត់សម្គាល់ឃើញចំពោះគ្រប់ x មិនសូន្យ $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1$ ។   គណនា $\lim_{x\to 0} f(x)$ ។

ចម្លើយ

បើ $x \neq 0, \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$ ដូច្នេះ $\left|x^2 \sin\frac{1}{x}\right| \leq x^2$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ យើងបាន : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

14.លំហាត់គំរូ

គណនាលីមីតខាងក្រោម :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\ln x\right)$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-\ln x\right)$

c. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln x}{x}\right)$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^3}{x^2}$

ចម្លើយ

a. តាង $f(x) = x^2 + \ln x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b. តាង $f(x) = x^2 - \ln x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{x}^2 = +\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} (-\ln x) = -\infty$

វាមានរាងមិនកំណត់ $\infty - \infty$

$$f(x) = x^2 - \ln x = x^2\left(1-\frac{\ln x}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-\ln x\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2 . \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln x}{x^2}\right)$$

$$= +\infty\cdot 1 = +\infty \qquad \left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2} = 0\right)$$

c. តាង $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ កំណត់លើ $(0,+\infty)$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln x \times \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \ln x \times \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}$$

$$= -\infty \times +\infty = -\infty$$

d. តាង $f(x)=\dfrac{(\ln x)^3}{x^2}$ កំណត់លើ $(0,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^3=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

វាមានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{+\infty}{+\infty}$

ដើម្បីគណនាលីមីតនេះយើងតាង $x=X^{\frac{3}{2}}$ ដូច្នេះ $X=x^{\frac{2}{3}}$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}X=+\infty$

$$f(x)=\frac{\left(\ln X^{\frac{3}{2}}\right)^3}{\left(X^{\frac{3}{2}}\right)^2}=\frac{\left(\frac{3}{2}\ln X\right)^3}{X^3}=\left(\frac{3}{2}\right)^3\left(\frac{\ln X}{X}\right)^3$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{X\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{\ln X}{X}\right)^3 \quad \text{តែ} \quad \lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0$$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

15. គេមានអនុគន៍ f កំណត់លើ $(1,+\infty)$ ដោយ $f(x)=\ln\left(\dfrac{3x+1}{x-1}\right)$ ។

គណនា $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ។

ចម្លើយ

យើងតាង $f(x)=\ln(u(x))$ ដែល $u(x)$ កំណត់លើ $(1,+\infty)$ ដោយ $u(x)=\dfrac{3x+1}{x-1}$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to1}(3x+1)=4$ និង $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(x-1)=0^+$ ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to1}u(x)=+\infty$

វិបាក $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\ln(u(x))=+\infty$

ចំពោះគ្រប់ x នៃ $(1,+\infty)$ យើងបាន $u(x)=\dfrac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}$

$$\lim_{x\to+\infty}u(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=3$$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(u(x))=\ln 3$

16. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$; $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$; $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$

ខ. $\lim\limits_{x\to0}(x-1)\ln x$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)\ln x$

គ. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2\ln x+1}{2x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+1}{2x}$

ចម្លើយ

ក.តាង $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=1$ យើងបាន $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=1$ យើងបាន $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=+\infty$ យើងបាន $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=0^+$ យើងបាន $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)=-\infty$

ខ. តាង $f(x)=(x-1)\ln x$

$\lim\limits_{x\to0}(x-1)=-1$, $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$ យើងបាន $\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ យើងបាន $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

គ. តាង $f(x)=\frac{2\ln x+1}{2x}$

$\lim\limits_{x\to0}(2\ln x+1)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}2x=0^+$ យើងបាន $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$

$$f(x)=\frac{2\ln x+1}{2x}=\frac{2\ln x}{2x}+\frac{1}{2x}=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$ យើងបាន $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

17.លំហាត់គំរូ

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x+1\right)$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2}$

c. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{x}$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}$

ចម្លើយ

a. តាង $f(x)=e^x-x+1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+1)=-\infty$

វាមានរាងមិនកំណត់ $\infty-\infty$

$$f(x)=e^x-x+1=e^x\left(1-\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^x\left(1-\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)=\lim_{x\to+\infty} e^x\times\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0 \;;\; \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)=1 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$$

ដូច្នេះ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b. $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2}$ តាង $f(x)=\frac{e^x}{x^2}=e^x\times\frac{1}{x^2}$ តែ $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$ និង $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$

ដូច្នេះ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

c.តាង $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{x}$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{x}=\lim_{x\to0}\left(e^x+e^{-x}\right)\times\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$$

$\lim_{x\to0}\left(e^x+e^{-x}\right)=2$ និង $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x}=-\infty$ យើងបាន $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to0}\left(e^x+e^{-x}\right)=2$ និង $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$ យើងបាន $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty$

d.តាង $f(x)=\frac{e^x-1}{x}=\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}$ $\quad\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}+\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)$

តែ $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ និង $\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$ យើងបាន $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

18. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមៈ

ក. $\lim_{x\to0} e^{\frac{1}{x}}$; ខ. $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}$; គ. $\lim_{x\to+\infty}\left(xe^x-x^3\right)$

ចម្លើយ

ក. យើងតាង $f(x)=e^{\frac{1}{x}}=e^{u(x)}$ ដែល $u(x)=\frac{1}{x}$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} u(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x}=-\infty$$ គេបាន $\lim_{X\to-\infty} e^X=0$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^{u(x)}=0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} u(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$ និង $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{X}=+\infty$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{u(x)}=+\infty$

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ ដោយ $\lim\limits_{X\to 0} e^{X}=e^{0}=1$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{u(x)}=1$

គ. យើងតាង $f(x)=xe^{x}-x^{3}$

កាលណា $x\to+\infty$, $f(x)$ មានរាងមិនកំណត់ $\infty-\infty$

ចំពោះគ្រប់ $x\neq 0$, $f(x)=x^{3}\left(\frac{e^{x}}{x^{2}}-1\right)$ ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{2}}=+\infty$ នោះយើងបាន

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{x}}{x^{2}}-1\right)=+\infty$ លើសពីនេះទៅទៀត $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3}=+\infty$ យើងអាចទាញបានតាមលីមីតនៃ

ផលគុណ , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ។

19. កំណត់លីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(1+e^{x}\right)\right]$, ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+e^{x}\right)\right]$, គ. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{x}\ln x\right)$, ឃ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}\ln x\right)$

ចម្លើយ

ក. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+e^{x}\right)=1$ យើងបាន $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(1+e^{x}\right)\right]=0$

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+e^{x}\right)=+\infty$ យើងបាន $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+e^{x}\right)\right]=+\infty$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty, \lim\limits_{x\to 0} e^{x}=1$ យើងបាន $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{x}\ln x\right)=-\infty$

ឃ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$ យើងបាន $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}\ln x\right)=+\infty$

ដេរីវេ និង ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍

I.មេរៀនសង្ខេប

1.ដេរីវេនៃអនុគមន៍

a.រូបមន្តលើដេរីវេ

ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍	$f(x)$	$f'(x)$
$D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$	a	0
	$ax+b$	a
	ax^2+bx+c	$2ax+b$
	$x^n \ (n \in \mathbb{R})$	nx^{n-1}
$D_f = D_{f'} = \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$D_f = (0,+\infty)$ និង $D_{f'} = (0,+\infty)$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
លក្ខខណ្ឌ	អនុគមន៍	អនុគមន៍មានដេរីវេកំណត់លើចន្លោះ I
អនុគមន៍ u និង v មានដេរីវេ នៅលើចន្លោះ I និង λ ចំនួនថេរ	$u+v$	$u'+v'$
	$u.v$	$u'.v+u.v'$
	$\lambda.u$	$\lambda.u'$
អនុគមន៍ u និង v មានដេរីវេ នៅលើចន្លោះ I និង $v \neq 0$ លើ I	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'.v-u.v'}{v^2}$
អនុគមន៍បណ្តាក់: u មានដេរីវេលើ I, v មានដេរីវេលើ $u(I)$	$v \circ u$	$(v' \circ u) \times u'$
u មានដេរីវេលើ I , $u > 0$ លើ I	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
	$u^n \ (n \in \mathbb{R})$	$nu^{n-1}.u'$

b.ដេរីវេ នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

ដែនកំណត់	$f(x)$	$f'(x)$
$D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$	$\cos x$	$-\sin x$
	$\sin x$	$\cos x$
$D_f = D_{f'} = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$D_f = D_{f'} = \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\cot x$	$-\left(1+\cot^2 x\right) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
	$\sin u$	$u'\cos u$
	$\cos u$	$-u'\sin u$
	$\tan u$	$u'\left(1+\tan^2 u\right) = \frac{u'}{\cos^2 u}$
	$\cot u$	$-u'\left(1+\cot^2 u\right) = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

បើ $f(x)$ មានដេរីវេបន្តបន្ទាប់រហូតដល់លំដាប់ n យើងកំណត់តាងដោយ $f^{(n)}(x)$ ដែល $f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$ ។

C.ដេរីវេ នៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និង លោការីតនេពែ

ដែនកំណត់	$f(x)$	$f'(x)$
$D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$	e^x	e^x
	e^u	$u'e^u$
$D_f =]0, +\infty[$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$

d. អនុវត្តន៍នៃដេរីវេ

- ល្បឿននៃចលនាមួយនៅខណ: t គឺ $v(t) = \frac{ds}{dt} = s'(t)$ ដែល $s(t)$ ជាចំម្ងាយចរនៅខណ: t ។
- សំទុះនៃចលនាមួយនៅខណ: t គឺ $a(t) = \frac{dv}{dt} = v'(t)$ ដែល $v(t)$ ជាល្បឿននៃចលនានៅខណ: t ។

2.ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍

a.ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ជួបប្រទះញឹកញាប់ (k ជាចំនួនថេរ)

អនុគមន៍ $f(x)$	ព្រីមីទីវ $F(x)$
$f(x)=0$	$F(x)=k$
$f(x)=a$	$F(x)=ax+b$
$f(x)=x^n\ (n\neq -1)$	$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}+k$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}+k$
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$F(x)=-\frac{1}{x}+k$
$f(x)=\frac{1}{x^n}\quad (n\geq 2)$	$F(x)=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+k$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln\lvert x\rvert+k$
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x+k$
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x+k$
$a\neq 0,\ f(x)=\cos(ax+b)$	$F(x)=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+k$
$a\neq 0,\ f(x)=\sin(ax+b)$	$F(x)=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+k$
$f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$F(x)=\tan x+k$
$f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}=1+\cot x$	$F(x)=-\cot x+k$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x+k$

b.ប្រមាណវិធីលើព្រីមីទីវ (c ជាចំនួនថេរ)

អនុគមន៍	ព្រីមីទីវ
$f+g$	$F+G+c$
λf	$\lambda F+c$
$u'v+uv'$	$uv+c$
$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}+c$
$(v'\circ u)\times u'$	$v\circ u+c$

$u^n u'$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}+c$
$\frac{u'}{u^n}\ (n\neq 1)$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$

II. លំហាត់គំរូ

កំណត់សម្គាល់ : អ្នកសិក្សាត្រូវខំប្រឹងដោះស្រាយលំហាត់ដោយខ្លួនឯង ចំណែកចម្លើយសម្រាប់តែផ្ទៀងផ្ទាត់។

1.គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $f(x)=3x^3-4x+2$ ខ. $f(x)=(2x-1)^5$

គ. $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ ឃ. $f(x)=x(x+\sqrt{1+x^2})$

ចម្លើយ

ក. $f(x)=3x^3-4x+2$ យើងបាន $f'(x)=9x^2-4$

ខ. $f(x)=(2x-1)^5$ យើងតាង $u=2x-1$ ឬ $u'=2$

$$f(x)=u^5 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=5u^{5-1}.u'=5u^4\times 2=10u^4$$

ឬ $f'(x)=10(2x-1)^4$

គ. $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ យើងតាង $u=1+x^2$ ឬ $u'=2x$

$$f(x)=\sqrt{u} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$f(x)=\sqrt{1+x^2}$ យើងបាន $f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

ឃ. $f(x)=x(x+\sqrt{1+x^2})$ យើងប្រើរូបមន្ត $(uv)'=u'v+uv'$

$$v=x+\sqrt{1+x^2}\Rightarrow v'=1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x)=1\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+x\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\frac{x\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\sqrt{1+x^2}}=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

2. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $f(x)=\cos^2 x$ ខ. $g(x)=\cos(x^2)$

គ. $h(x)=\cos^2(x^2)$ ឃ. $k(x)=x^2\cos(3x+1)$

ចម្លើយ

ក. $f(x)=\cos^2 x$ មានរាង $u^2(x)$ ដោយ $u(x)=\cos x$

គេបាន $(u^2)'=2uu'$

$f'(x)=2u(x).u'(x)=2(\cos x)(-\sin x)=-2\sin x\cos x=-\sin 2x$

ខ. $g(x)=\cos(x^2)$ មានរាង $\cos(v(x))$ ដោយ $v(x)=x^2$

តាមដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់យើងបាន

$$g'(x)=\left[\cos(v(x))\right]'\cdot v'(x)=\left[-\sin(v(x))\right]\cdot 2x=-2x\sin(x^2)$$

គ. $h(x)=\cos^2(x^2)=\left[\cos x^2\right]^2=\left[g(x)\right]^2$

ក្នុងសំណួរ ខ យើងបាន $g'(x)=-2x\sin(x^2)$

$$h'(x)=2g(x)\cdot g'(x)=2\cos(x^2)\left[-2x\sin(x^2)\right]=-2x\sin(2x^2)$$

ឃ. $k(x)=x^2\cos(3x+1)$

យើងប្រើរូបមន្ត $(uv)'=u'v+uv'$ និង $(\cos u)'=-u'\sin u$

$u=x^2 \Rightarrow u'=2x$

$v=\cos u \Rightarrow v'=-3\sin(3x+1)$

$$f'(x)=2x\cos(3x+1)+x^2\left[-3\sin(3x+1)\right]=2x\cos(3x+1)-3x^2\sin(3x+1)$$

3.គណនា ដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $f(x)=e^x+1-xe^x$ ខ. $g(x)=\frac{10x}{e^x+1}$

គ. $h(x)=-x+1-2\ln x$ ឃ. $k(x)=\frac{x+\ln x}{x^2}$

ចម្លើយ

ក. $f(x)=e^x+1-xe^x$ យើងបាន $f'(x)=e^x-(1\cdot e^x+xe^x)=-xe^x$

ខ. $g(x)=\frac{10x}{e^x+1}$ នោះ $g'(x)=\frac{10(e^x+1)-10x(e^x)}{(e^x+1)^2}$

ដូច្នេះ $g'(x)=\frac{10(e^x+1-xe^x)}{(e^x+1)^2}$

គ. $h(x)=-x+1-2\ln x$ យើងបាន $h'(x)=-1-\frac{2}{x}=\frac{-x-2}{x}$

ឃ. $k(x)=\frac{x+\ln x}{x^2}$ យើងប្រើរូបមន្ត $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$k'(x)=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x^2-2x(x+\ln x)}{x^4}=\frac{x+1-2x-2\ln x}{x^3}=\frac{-x+1-2\ln x}{x^3}$$

4.គណនាដេរីវេបន្តបន្ទាប់នៃអនុគមន៍ $f(x)=(3x+4)^5$

ចម្លើយ

យើងឃើញ $f(x)=\left(u(x)\right)^5$ ដោយ $u(x)=3x+4$ និង $u'(x)=3$

$$f'(x)=5\left(u(x)\right)^4u'(x)=5(3x+4)^4\times 3$$

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=4\times 5(3x+4)^3\times 3^2$$

$$f^{(3)}(x)=3\times 4\times 5(3x+4)^2\times 3^3$$

$$f^{(4)}(x)=2\times 3\times 4\times 5(3x+4)\times 3^4$$

$$f^{(5)}(x)=2\times 3\times 4\times 5\times 3^5=5!\times 3^5$$

$$f^{(6)}(x)=0$$

ចំពោះ $n>5$ $\quad f^{(n)}(x)=0$

5. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)=\ln\left(\frac{3x+1}{x-1}\right)$

ចម្លើយ

$f(x)=\ln\left(\frac{3x+1}{x-1}\right)$ តាង $u(x)=\frac{3x+1}{x-1}$

យើងបាន $f(x)=\ln\left(u(x)\right)\Rightarrow f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$

$$u(x)=\frac{3x+1}{x-1}\Rightarrow u'(x)=\frac{3(x-1)-(3x+1)}{(x-1)^2}=\frac{-4}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{-4}{(x-1)^2}}{\frac{3x+1}{x-1}}=\frac{-4}{(3x+1)(x-1)}$$

6. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $f(x)=xe^x$ ខ. $g(x)=x^3e^x$

គ. $h(x)=\frac{e^x}{x^2}$ ឃ. $k(x)=\frac{x}{e^x}$

ង. $l(x)=x^2e^{-x}$ ច. $f(x)=e^{\left(1-\frac{1}{x}\right)}$

ចម្លើយ

ក. $f(x)=xe^x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=1\cdot e^x+x\cdot e^x=e^x(1+x)$

ខ. $g(x)=x^3e^x \Rightarrow \quad g'(x)=3x^2e^x+x^3e^x=x^2e^x(3+x)$

គ. $h(x)=\frac{e^x}{x^2} \quad\Rightarrow\quad h'(x)=\frac{x^2e^x-e^x\cdot 2x}{x^4}=\frac{xe^x(x-2)}{x^4}$

ដូច្នេះ $h'(x)=\frac{e^x(x-2)}{x^3}$

ឃ. $k(x)=\frac{x}{e^x} \quad\Rightarrow\quad k'(x)=\frac{e^x-xe^x}{(e^x)^2}=\frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2}$

ដូច្នេះ $k'(x)=\frac{1-x}{e^x}$

ង. $l(x)=x^2e^{-x} \quad\Rightarrow\quad l'(x)=2xe^{-x}+x^2(-e^{-x})$

$=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=xe^{-x}(2-x)$

ដូច្នេះ $l'(x)=xe^{-x}(2-x)$

ច. $f(x)=e^{\left(1-\frac{1}{x}\right)}$ យើងតាង $u(x)=1-\frac{1}{x}$ និង $u'(x)=\frac{1}{x^2}$

$f(x)=e^{u(x)} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=u'(x)e^{u(x)}=\frac{1}{x^2}e^{\left(1-\frac{1}{x}\right)}$

7.គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=\frac{1}{\left(x^2+3\right)^5}$ និង អនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{-1,0\}$ ដោយ $g(x)=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{(x+1)^5}$

ក.គណនា $f'(x)$

ខ.គណនា $g'(x)$ ។ បង្ហាញថា $g'(x)<0$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq -1$ និង $x\neq 0$ ។

ចម្លើយ

ក. $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+3)^5}$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$

យើងតាង $u(x)=(x^2+3)^5 \Rightarrow u'(x)=5(2x)(x^2+3)^4=10x(x^2+3)^4$

$$f(x)=\frac{1}{u(x)}\Rightarrow f'(x)=-\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}=\frac{10x(x^2+3)^4}{(x^2+3)^{10}}=\frac{10x}{(x^2+3)^6}$$

ដូច្នេះ $f'(x)=\dfrac{10x}{(x^2+3)^6}$

ខ. $g(x)=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{(x+1)^5}$ កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{-1,0\}$

យើងតាង $h(x)=\dfrac{1}{x^3}\Rightarrow h'(x)=-\dfrac{3x^2}{x^6}=-\dfrac{3}{x^4}$

$$k(x)=\frac{1}{(x+1)^5}\Rightarrow k'(x)=\frac{-5(x+1)^4}{(x+1)^{10}}=\frac{-5}{(x+1)^6}$$

$$g'(x)=h'(x)+k'(x)=-\frac{3}{x^4}-\frac{5}{(x+1)^6}$$

$g'(x)=-\dfrac{3}{x^4}-\dfrac{5}{(x+1)^6}$ លើ $\mathbb{R}-\{-1,0\}$ យើងបាន $-\dfrac{3}{x^4}<0$ និង $-\dfrac{5}{(x+1)^6}<0$

ដូច្នេះ $g'(x)<0$ (ផលបូកនៃពីរចំនួនអវិជ្ជមានដាច់ខាត)

8. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ ។ ស្រាយបំភ្លឺថា ចំពោះគ្រប់ x ជាចំនួនពិត $f'(x)>0$ ។

ចម្លើយ

គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=x\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

យើងបាន $f'(x)=1\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+x\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$

$$= x+\sqrt{1+x^2}+x\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=x+\sqrt{1+x^2}+\frac{x\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$f'(x)=\frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

បង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនពិត x, $f'(x)>0$

គ្រប់ x លើ $\mathbb{R}$, $\sqrt{1+x^2}>0$

គ្រប់ x លើ $\mathbb{R}$, $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2\geq 0$ ប៉ុន្តែ $x+\sqrt{1+x^2}$ មិនអាចស្មើ 0 ទេ

ពីព្រោះបើ $x+\sqrt{1+x^2}=0$ នោះគេបាន $x=-\sqrt{1+x^2}$ ដូច្នេះដោយលើកអង្គទាំងពីរជាការេ

$x^2=1+x^2$ ជាករណីមិនអាច។

វិបាក $f'(x)>0$

9.គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍

ក. $f(x)=\sin x$ ខ. $g(x)=\cos x$

ចម្លើយ

ក. $f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow f''(x)=-\sin x=\sin(x+\pi)=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$$

ដូច្នេះគេអាចគិតថា : $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$ $[P]$

តាមគោលការណ៍នៃវិចារអនុមាណរួម :

- $[P]$ ពិតចំពោះ $n=1$
- យើងឧបមា $[P]$ ពិតចំពោះ n
- យើងស្រាយបញ្ជាក់ថាពិតចំពោះ $n+1$

$$f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}(x)\right)'=\left(\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

ដូច្នេះ $[P]$ ពិតចំពោះ $n+1$

ជាការសន្និដ្ឋាន : ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ និងចំនួនគត់ $n\geq 1$

គេបាន ដេរីវេទី n នៃ $f(x)=\sin x$ គឺ $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

ខ. គណនាដេរីវេទី n នៃ $g(x)=\cos x$

$$g(x)=\cos x \Rightarrow g'(x)=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\Rightarrow g''(x)=-\cos x=\cos(x+\pi)=\cos\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$$

ដូច្នេះយើងគិតថា $g^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$ $[Q]$

តាមគោលការណ៍នៃវិចារអនុមាណរួម :

- $[Q]$ ពិតចំពោះ $n=1$
- យើងឧបមាថា $[Q]$ ពិតចំពោះ n
- យើងស្រាយបញ្ជាក់ថា $[Q]$ ពិតចំពោះ $n+1$

$$g^{(n+1)}(x)=\left(g^{(n)}(x)\right)'=\left(\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right)'=-\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

ដូច្នេះ $[Q]$ ពិតចំពោះ $n+1$

ជាការសន្និដ្ឋាន : ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ និង ចំនួនគត់ $n\geq 1$

គេបាន ដេរីវេទី n នៃ $g(x)=\cos x$ គឺ $g^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

10. បើ $f(x)=x^3-x^2+2x-1$ កំណត់ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ដែល វាយកតម្លៃ 4 ចំពោះ $x=1$ ។

ព្រីមីទីវទូទៅ $F(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+x^2-x+k$

$F(1)=4=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1-1+k$ យើងបាន $k=\frac{49}{12}$

ដូច្នេះព្រីមីទីវត្រូវកំណត់គឺ $F(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+x^2-x+\frac{49}{12}$

11. រកព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$ ខ. $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ គ. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

ចម្លើយ

ក. $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$ ព្រីមីទីវនៃ x^2 គឺ $\frac{x^3}{3}$; ព្រីមីទីវនៃ $\frac{1}{x^2}$ គឺ $\frac{-1}{x}$

យើងបានព្រីមីទីវនៃ $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+k$

ខ. $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ តាង $u(x)=x-1 \Rightarrow u'(x)=1$

$f(x)=\frac{u'(x)}{\left(u(x)\right)^2}$ ដូច្នេះ $F(x)=-\frac{1}{u(x)}+k$ ឬ $F(x)=-\frac{1}{x-1}+k$

គ. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ យើងតាង $u(x)=1+x^2 \Rightarrow u'(x)=2x$

$f(x)=\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

ដូច្នេះ $F(x)=\sqrt{1+x^2}+k$

12. រកព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x)=\frac{2}{3-x}$ ខ. $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$

គ. $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ ឃ. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

ចម្លើយ

ក. $f(x)=\frac{2}{3-x}$ តាង $u(x)=3-x$ និង $u'(x)=-1$

$f(x)=-2\times\frac{u'(x)}{u(x)}$

ដូច្នេះ ព្រីមីទីវ នៃ $f(x)$ គឺ $F(x)=-2\ln|3-x|+k$

ចំពោះ $x\in(3,+\infty)$; $|3-x|=x-3$ គេអាចបាន $F(x)=-2\ln(3-x)+k$

ខ. $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$ យើងតាង $u(x)=x^2+x+1$ និង $u'(x)=2x+1$

$f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ ដូច្នេះ ព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ គឺ $F(x)=\ln|x^2+x+1|+k$

តែចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}, x^2+x+1>0$ ដូច្នេះ $F(x)=\ln(x^2+x+1)+k$

គ. $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ តាង $u(x)=\ln x$ និង $u'(x)=\frac{1}{x}$

$f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ ដូច្នេះ ព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ គឺ $F(x)=\ln|\ln x|+k$

$x\in(1,+\infty)$, $\ln x>0$ ដូច្នេះ $F(x)=\ln[\ln x]+k$

$x\in(0,1)$, $\ln x<0$ ដូច្នេះ $F(x)=\ln[-\ln x]+k$

ឃ. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ តាង $u(x)=\ln x$ និង $u'(x)=\frac{1}{x}$

$f(x)=u'(x)u(x)$ យើងបាន $F(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+k$

13. គណនាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $f(x)=e^{(-2x-1)}$ ខ. $f(x)=(2x+1)e^{(x^2+x)}$ គ. $f(x)=xe^{(x^2+3)}$

ចម្លើយ

ក. $f(x)=e^{(-2x-1)}$ តាង $u(x)=-2x-1$ និង $u'(x)=-2$

$f(x)=-\frac{1}{2}u'(x)\cdot e^{u(x)}$ ដូច្នេះ ព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ គឺ $F(x)=-\frac{1}{2}e^{(-2x-1)}+k$

ខ. $f(x)=(2x+1)e^{(x^2+x)}$ តាង $u(x)=x^2+x$ និង $u'(x)=2x+1$

យើងបាន $f(x)=u'(x)\cdot e^{u(x)}$ ដូច្នេះ ព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ គឺ $F(x)=e^{(x^2+x)}+k$

គ. $f(x)=xe^{(x^2+3)}$ តាង $u(x)=x^2+3$ និង $u'(x)=2x$

យើងបាន $f(x)=\frac{1}{2}u'(x)\cdot e^{u(x)}$ ដូច្នេះ ព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ គឺ $F(x)=\frac{1}{2}e^{(x^2+3)}+k$

អាំងតេក្រាលកំណត់

I.មេរៀនសង្ខេប

- អនុគមន៍ f មានព្រីមីទីវ F លើចន្លោះ I និង a និង b ជាធាតុរបស់ I
  នោះ $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- អនុគមន៍ f មានព្រីមីទីវលើ I និង a និង b ជាធាតុរបស់ I
  នោះ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)$
- អនុគមន៍ f មានព្រីមីទីវលើ I ។ គ្រប់ a,b,c ធាតុរបស់ I $(a<b<c)$
  $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
- អនុគមន៍ f និង g មានព្រីមីទីវលើ I ។ គ្រប់ធាតុ a,b របស់ I និងគ្រប់ λ នៃ $\mathbb{R}$
  $\int_a^b \left[f(x) + g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
  $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$
- អនុគមន៍ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់លើ I និងមានដេរីវេលើ I និង a,b ជាធាតុរបស់ I
  $\int_a^b f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$

II.លំហាត់គំរូ

កំណត់សម្គាល់ : អ្នកសិក្សាត្រូវខំប្រឹងដោះស្រាយលំហាត់ដោយខ្លួនឯង ចំណែកចម្លើយសម្រាប់តែផ្ទៀងផ្ទាត់។

1.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

ក. $\int_0^1 \left(x^3+1\right)dx$ ខ. $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^4}dx$ គ. $\int_1^2 \frac{1}{t^2}dt$

ចម្លើយ

ក. $\int_0^1 \left(x^3+1\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} + x\right]_0^1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$

ខ. $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^4}dx = \left[-\frac{1}{3x^3}\right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{24} = \frac{7}{24}$

គ. $\int_1^2 \frac{1}{t^2}dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$

2.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

ក. $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{u}}du$ ខ. $\int_1^e \frac{1}{t}dt$ គ. $\int_0^1 2e^x dx$

ចម្លើយ

ក. $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{u}}du = \left[2\sqrt{u}\right]_2^4 = 4-2\sqrt{2}$

ខ. $\int_1^e \frac{1}{t}dt = \left[\ln t\right]_1^e = 1$

គ. $\int_0^1 2e^x dx = \left[2e^x\right]_0^1 = 2(e-1)$

3.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

ក. $I = \int_1^5 \left(x^2+2x-3\right)dx$ ខ. $I = \int_1^3 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$

គ. $I = \int_2^3 \frac{2}{\sqrt{x}}dx$ ឃ. $I = \int_{-3}^3 xe^{x^2}dx$

ចម្លើយ

ក. $I = \int_1^5 \left(x^2+2x-3\right)dx = \left[\frac{1}{3}x^3+x^2-3x\right]_1^5$

$= \left(\frac{125}{3}+25-15\right)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right) = \frac{160}{3}$

ខ. $I = \int_1^3 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$ តាង $u(x) = x^2+x+1$ ឬ $u'(x) = 2x+1$

យើងបាន $I = \int_1^3 \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \left[\ln|u(x)|\right]_1^3 = \left[\ln|x^2+x+1|\right]_1^3$

$= \left[\ln\left(x^2+x+1\right)\right]_1^3$ (ពីព្រោះ $x^2+x+1>0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$)

$I = \ln 13 - \ln 3 = \ln\frac{13}{3}$

គ. $I=\int_2^3 \frac{2}{\sqrt{x}}dx=\left[4\sqrt{x}\right]_2^3=4\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

ឃ. $I=\int_{-3}^{3} xe^{x^2}dx=\left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_{-3}^{3}=\frac{1}{2}e^9-\frac{1}{2}e^9=0$

4. ក.កំណត់ចំនួនពិត a,b ដើម្បីឲ្យ $f(x)=\frac{x+1}{x+2}=a+\frac{b}{x+2}$

ខ. $I=\int_1^2 f(x)dx$

ចម្លើយ

ក. $\frac{x+1}{x+2}=a+\frac{b}{x+2}=\frac{ax+2a+b}{x+2}$

យើងបាន $\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=1 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$

ដូច្នេះ $f(x)=1-\frac{1}{x+2}$

ខ.គណនា $I=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\left(1-\frac{1}{x+2}\right)dx=\int_1^2 dx-\int_1^2\frac{dx}{x+2}=[x]_1^2-[\ln|x+2|]_1^2$

$=1-[2\ln 2-\ln 3]=1-2\ln 2+\ln 3$

5.ក.កំណត់ចំនួនពិត a,b ដើម្បីឲ្យ $f(x)=\frac{x-2}{(x-1)^2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}$

ខ.គណនា $I=\int_{-1}^{0} f(x)dx$

ចម្លើយ

$f(x)=\frac{x-2}{(x-1)^2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}=\frac{a(x-1)+b}{(x-1)^2}=\frac{ax-(a-b)}{(x-1)^2}$

យើងបាន $\begin{cases} a=1 \\ a-b=2 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$

ដូច្នេះ $f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}$

ខ.គណនា $I=\int_{-1}^{0} f(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x-1}dx-\int_{-1}^{0}\frac{1}{(x-1)^2}dx=[\ln|x-1|]_{-1}^{0}-\left[\frac{-1}{x-1}\right]_{-1}^{0}$

$$=\left[\ln(1-x)\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{-1}{x-1}\right]_{-1}^{0}=\ln 1-\ln 2-\left(1-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}-\ln 2$$

6.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(-\infty,1)$ ដោយ

$$f(x)=\frac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

ក. v ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $(-\infty,1)$ ដោយ $v(x)=e^{\frac{x+1}{x-1}}$ ។ គណនា $v'(x)$ ។

ខ.កំណត់ព្រីមីទីវនៃ f លើ $(-\infty,1)$

គ.α ជាចំនួនពិតដែល $0<\alpha<1$; កំណត់ $g(\alpha)=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$

ឃ.រកលីមីតនៃ $g(\alpha)$ កាលណា α ខិតទៅរក 1

ចម្លើយ

ក. គណនា $v'(x)$

$$v(x)=e^{\frac{x+1}{x-1}}\Rightarrow v'(x)=e^{\frac{x+1}{x-1}}\times\frac{1(x-1)-1(x+1)}{(x-1)^2}=-\frac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

ខ.កំណត់ព្រីមីទីវនៃ f លើ $(-\infty,1)$

យើងបាន $v'(x)=-\frac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}=-f(x)$ ឬ $f(x)=-v'(x)$

ដូច្នេះ $-v(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ លើ $(-\infty,1)$ ពីព្រោះ $-v'(x)=f(x)$

គ.$\alpha\in(0,1)$ កំណត់ $g(\alpha)=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=\left[-v(x)\right]_{-\alpha}^{\alpha}$

យើងបាន $g(\alpha)=-v(\alpha)-[-v(-\alpha)]=v(-\alpha)-v(\alpha)$

$$g(\alpha)=e^{\frac{-\alpha+1}{-\alpha-1}}-e^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}=e^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}-e^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}$$

ឃ.គណនា $\lim_{\alpha\to 1} g(\alpha)=\lim_{\alpha\to 1}\left(e^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}-e^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}\right)$

- $\lim\limits_{\alpha\to1}\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}=\dfrac{0}{2}=0$ ដូច្នេះ $\lim\limits_{\alpha\to1}e^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}=\lim\limits_{X\to0}e^{X}=e^{0}=1$
- $\lim\limits_{\alpha\to1}(\alpha+1)=2$ និង $\lim\limits_{\substack{\alpha\to1\\ \alpha<1}}(\alpha-1)=0^{-}$ ដូច្នេះ $\lim\limits_{\substack{\alpha\to1\\ \alpha<1}}\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}=-\infty$

  វិបាក $\lim\limits_{\alpha\to1^{-}}e^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}=\lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=0$
- ដូច្នេះ $\lim\limits_{\alpha\to1^{-}}g(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to1^{-}}\left(e^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}-e^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}\right)=1-0=1$

  យើងបាន $\lim\limits_{\alpha\to1^{-}}g(\alpha)=1$

7.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4 x\,dx \quad \text{និង} \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4 x\cos x\,dx$$

ចម្លើយ

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4 x\,dx$

$$\cos 2x=1-2\sin^2 x\Rightarrow \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\sin^4 x=\frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2=\frac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)$$

យើងដឹងថា $\cos 4x=2\cos^2 2x-1$ ដូច្នេះ $\cos^2 2x=\dfrac{1+\cos 4x}{2}$

យើងបាន $\sin^4 x=\dfrac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\dfrac{1+\cos 4x}{2}\right)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{2}-2\cos 2x+\dfrac{\cos 4x}{2}\right)$

$$=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{3}{8}dx-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx+\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 4x\,dx$$

$$=\left[\frac{3}{8}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\left[\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[\frac{\sin 4x}{32}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{3\pi}{32}-\frac{1}{4}$$

គណនាអាំងតេក្រាល $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4 x\cos x\,dx$

យើងសង្កេតឃើញថា $\sin^4 x\cos x$ ជាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{5}\sin^5 x$

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4 x\cos x dx=\left[\frac{1}{5}\sin^5 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5=\frac{\sqrt{2}}{40}$$

8.គេមានអាំងតេក្រាល: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\cos^4 xdx$ និង $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\sin^4 xdx$

គណនា $I+J$; $I-J$; I និង J ។

ចម្លើយ

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\cos^4 xdx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\sin^4 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^2 x\cos^4 x+\cos^2 x\sin^4 x\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^2 x\cos^2 x\right)\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\cos^2 xdx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2xdx=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 4x)dx=\frac{1}{8}\left[x-\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{32}$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\cos^4 xdx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\sin^4 xdx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^2 x\cos^2 x\right)\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2x\cos 2xdx$$

តាង $f(x)=\sin^2 2x\cos 2x$ មានព្រីមីទីវ $F(x)=\frac{1}{6}\sin^3 2x$

ដូច្នេះ $I-J=\frac{1}{24}\left[\sin^3 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{24}$

គណនា I និង J

ដោយ $\begin{cases} I+J=\frac{\pi}{32} \\ I-J=\frac{1}{24}\end{cases}$ យើងបាន $I=\frac{\pi}{64}+\frac{1}{48}$ និង $J=\frac{\pi}{64}-\frac{1}{48}$

9. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

$$I=\int_1^e \ln xdx\ ;\quad J=\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx\ ;\quad k=\int_e^{2e}\frac{1}{x\ln x}dx$$

ចម្លើយ

គណនា $I=\int_1^e \ln x dx$

ប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកដោយតាង

$u(x)=\ln x \Rightarrow u'(x)=\frac{1}{x}\ ;\ v'(x)=1 \Rightarrow v(x)=x$

$\left[u(x)v(x)\right]'=v(x)u'(x)+u(x)v'(x)$

$(x\ln x)'=x\cdot\frac{1}{x}+\ln x$

$I=\int_1^e \ln x dx=\int_1^e [x\ln x]' dx-\int_1^e \frac{1}{x} x dx$

$\quad=[x\ln x]_1^e-\int_1^e dx=e-[x]_1^e=e-(e-1)=1$

$I=\int_1^e \ln x dx=1$

គណនា $J=\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$ យើងកត់សម្គាល់ឃើញថា $\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{x}\cdot\ln x$

តាង $f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$ ដូច្នេះ $\frac{\ln x}{x}=f(x)f'(x)$ ដែលមានព្រីមីទីវ

$F(x)=\frac{1}{2}f^2(x)$

វិបាក ព្រីមីទីវនៃ $\frac{\ln x}{x}$ គឺ $\frac{1}{2}(\ln x)^2$

$J=\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e=\frac{1}{2}$

គណនា $k=\int_e^{2e}\frac{dx}{x\ln x}$

យើងកត់សម្គាល់ឃើញថា $\frac{1}{x\ln x}=\frac{(\ln x)'}{\ln x}$

ព្រីមីទីវនៃ $\frac{f'}{f}$ គឺអនុគមន៍ $\ln|f|$ ។ ដូច្នេះ ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $\frac{1}{x\ln x}$ គឺ

អនុគមន៍ $\ln|\ln x|=\ln(\ln x)$ បើយើងឧបមា $x>1$

$k=\int_e^{2e}\frac{dx}{x\ln x}=\left[\ln(\ln x)\right]_e^{2e}=\ln(\ln 2e)-\ln(\ln e)$

$$= \ln(\ln 2e) = \ln(1+\ln 2)$$

10.ក.រកព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)=\sin^3 x$ ។

ខ.ទាញយក $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^3 x dx$ (ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក)

ចម្លើយ

ក. $\sin^3 x = \sin x \sin^2 x = \sin x \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin x\cos 2x$

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$$

ដូច្នេះ $\sin x\cos 2x = \frac{1}{2}\left[\sin 3x + \sin(-x)\right] = \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x)$

$$\sin^3 x = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{4}(\sin 3x - \sin x) = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$$

វិបាក : ព្រីមីទីវនៃ $f(x)=\sin^3 x$ គឺ $F(x) = -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + c$

ខ.យើងតាង $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^3 x dx$ យើងប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

$$u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$$

$$v'(x) = \sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x \Rightarrow v(x) = -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x$$

$$\left[u(x)\cdot v(x)\right]' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x) = x\sin^3 x + \left(-\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x\right)$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^3 x dx = \left[x\left(-\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x\right)dx$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx - \frac{1}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 3x dx = \frac{3}{4}\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{36}\left[\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4} + \frac{1}{36} = \frac{28}{36} = \frac{7}{9}$$

សិក្សាអថេរភាព និង សង់ខ្សែកោង

I.មេរៀនសង្ខេប

1.អនុគមន៍សនិទាន

ក.អនុគមន៍ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$ ដែល $p\neq 0, a\neq 0$ និង $ax_0^2+bx_0+c\neq 0$ ចំពោះ $x_0\neq -\dfrac{q}{p}$

- រកដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{q}{p}\right\}$
- ទិសដៅអថេរភាព
  - គណនាដេរីវេ $y'=\dfrac{apx^2+2aqx+bq-cp}{(px+q)^2}$
- អាស៊ីមតូត : បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=-\dfrac{q}{p}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។
  - បើ $y=mx+n+\dfrac{k}{px+q}$ នោះបន្ទាត់ $y=mx+n$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។
  - ក្រាបជាអ៊ីពែបូលដែលផ្ចិតឆ្លុះជាចំណុចប្រសព្វរវាងអាស៊ីមតូតទាំងពីរ ។
  - បើ $y'=0$ មានឫសពីរខុសគ្នានោះអនុគមន៍មានអតិបរមាធៀបមួយនិងអប្បបរមាធៀបមួយ ។
  - បើ $y'=0$ គ្មានឫសនោះអនុគមន៍គ្មានបរមាទេ ។
  - បើ $y'=0$ មានឫសឌុបនោះអនុគមន៍គ្មានបរមាទេ ។

ខ.អនុគមន៍ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ ដែល a,b,c ខុសពីសូន្យ និង $p\neq 0$

អនុគមន៍មានលក្ខណៈមួយចំនួនដូចខាងក្រោម :

- គ្រប់ក្រាបតាងអនុគមន៍នេះមានអាស៊ីមតូតដេកមួយជានិច្ច ។
- ចំនួនអាស៊ីមតូតឈរគឺអាស្រ័យនឹងចំនួនឫសរបស់សមីការ $px^2+qx+r=0$ ។

  បើ $\Delta=q^2-4pr<0$ គ្មានអាស៊ីមតូតឈរទេ និងក្រាបមានមែកតែមួយ ។

  បើ $\Delta=q^2-4pr=0$ មានអាស៊ីមតូតឈរមួយ $x=-\dfrac{q}{2p}$ និង ក្រាបមានមែកពីរដាច់គ្នា ។

  បើ $\Delta=q^2-4pr>0$ មានអាស៊ីមតូតឈរពីរ $x=\dfrac{-q\pm\sqrt{\Delta}}{2p}$ និង ក្រាបមានមែកបីដាច់គ្នា ។

2.អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

លំនាំនៃការសិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបដូចគ្នាទៅនឹងអនុគមន៍សនិទានដែរ ។

- គោល e : គោល e ដែលគេប្រើមានតម្លៃ $e = 2.718281$ ។ អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលគោល e ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = e^x$ ហៅថាអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលគោល e ។
- ដេរីវេ : $y = e^x$ យើងបាន $y' = \left(e^x\right)' = e^x$

  $y = e^{u(x)}$ យើងបាន $y' = \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$
- ការអនុវត្តន៍អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

  រូបមន្តការប្រាក់សមាស : $A = p\left(1 + \frac{r}{p}\right)^{nt}$ ដែល p ជាប្រាក់ដើម r អត្រាការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ n ជាចំនួនដងនៃការទូទាត់ការប្រាក់ក្នុងមួយឆ្នាំ ហើយ A ជាចំនួនប្រាក់សរុបក្នុងរយះពេល t ឆ្នាំ ។ បើចំនួនដងនៃការទូទាត់ច្រើនអនន្ត ឬ ការទូទាត់ជាបន្តបន្ទាប់នោះរូបមន្តនៃការប្រាក់សមាសកំណត់ដោយ $A = pe^{rt}$ ដែលក្នុងនោះ A ជាប្រាក់សរុប p ជាប្រាក់ដើម r ជាអត្រាការប្រាក់សមាស និង t ជាចំនួនឆ្នាំដាក់ប្រាក់ ។

3.អនុគមន៍លោការីត

លំនាំនៃការសិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបដូចគ្នាទៅនឹងអនុគមន៍សនិទានដែរ ។

- លោការីត : លោការីតនេពែនៃចំនួនវិជ្ជមាន k គឺជានិទស្សន្ត x នៃ e^x ដែល $e^x = k$ គេកំណត់សរសេរ $x = \ln k$ ហើយ $x = \ln k$ សមមូល $e^x = k$ ។
- អនុគមន៍លោការីត : បើ $x > 0$ អនុគមន៍លោការីតនេពែនៃ x កំណត់ដោយ $y = \ln x$ ។
- លីមីត : បើ $n > 0, x > 0$ នោះ $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
- ដេរីវេ : បើ $f(x) = \ln x$ នោះ $f'(x) = \frac{1}{x}$ ដែល $x > 0$ ។

  បើ $g(x) = \ln(u(x))$ នោះ $g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ ដែល $u(x) > 0$ ។

II.**លំហាត់គំរូ**

កំណត់សម្គាល់ : អ្នកសិក្សាត្រូវខំប្រឹងដោះស្រាយលំហាត់ដោយខ្លួនឯង ចំណែកចម្លើយសម្រាប់តែផ្ទៀងផ្ទាត់។

1.សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ f ដែល $f(x) = \frac{x+4}{2x-3}$

ចម្លើយ

- ដែនកំណត់របស់អនុគមន៍ f យើងតាង $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$ ពីព្រោះ $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+4}{2x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{4}{x}\right)}{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{4}{x}}{2-\frac{3}{x}}=\frac{1}{2}$$

  $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+4}{2x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{4}{x}\right)}{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{4}{x}}{2-\frac{3}{x}}=\frac{1}{2}$$

  យើងឃើញថា : $f(x)-\frac{1}{2}=\frac{11}{2(2x-3)}$ ដូច្នេះ $\begin{cases}\text{បើ } x>\frac{3}{2} \text{ នោះ } f(x)>\frac{1}{2}\\ \text{បើ } x<\frac{3}{2} \text{ នោះ } f(x)<\frac{1}{2}\end{cases}$

- $\lim_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+} f(x)=\lim_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+}\frac{x+4}{2x-3}=+\infty$ ($\lim_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+}(x+4)=\frac{3}{2}+4=\frac{11}{2}$ និង $\lim_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+}(2x-3)=0^+$)

- $\lim_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^-} f(x)=\lim_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^-}\frac{x+4}{2x-3}=-\infty$ ($\lim_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^-}(x+4)=\frac{3}{2}+4=\frac{11}{2}$ និង $\lim_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^-}(2x-3)=0^-$)

  យើងកត់សម្គាល់ឃើញថាតាមលីមីតខាងលើបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=\frac{3}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ និង

  $y=\frac{1}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

- អថេរភាព : $f(x)=\frac{x+4}{2x-3}$ យើងបាន $f'(x)=\frac{-11}{(2x-3)^2}$ នាំឲ្យយើងបានគ្រប់

  $x\in D=\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}; f'(x)<0$ ដូច្នេះ អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ចុះលើ D ។

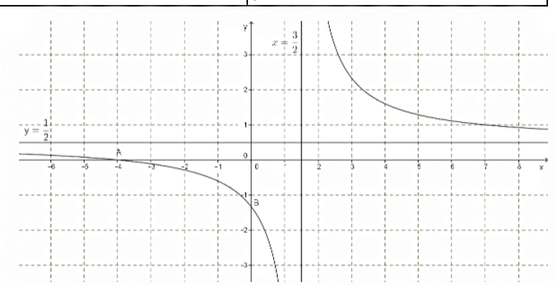
- តារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$\frac{1}{2} \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow \frac{1}{2}$

- សងក្រាបនៃ $f(x)$

  យើងសង់អាស៊ីមតូតឈរ

  មានសមីការ $x=\frac{3}{2}$ និង អាស៊ីមតូតដេក



$y=\frac{1}{2}$, យើងដៅចំណុច

$$A: x=-4, y=0 \quad B: x=0, y=-\frac{4}{3} \quad C: x=1, y=-5 \quad D: x=2, y=6$$

2.សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=\frac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+7}$

ចម្លើយ

- ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f :
  សមីការ $x^2-5x+7=0$ មាន $\Delta=25-4\times7=-3<0$ ពុំមានឫសទេ ។ ដូច្នេះ ដែនកំណត់នៃ f គឺ $D=\mathbb{R}$ ។
- $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{7}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2-\frac{7}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}=2$$
  $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$
  ដូច្នេះបន្ទាត់ (Δ) ដែលមានសមីការ $y=2$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបរបស់អនុគមន៍ f ។
- អថេរភាព : $f(x)=\frac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+7}$ ប្រើ $y=\frac{u}{v}\Rightarrow y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$
  យើងបាន $f'(x)=\frac{-3\left(x^2-6x+8\right)}{\left(x^2-5x+7\right)^2}$ យើងសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$:
  $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-6x+8=0$ យើងបាន $x'=4$ និង $x''=2$ និង $f(2)=-1, f(4)=3$
  $f'(x)>0$ នៅចន្លោះ $(2,4)$; $f'(x)<0$ កាលណា $x<2$ ឬ $x>4$
- តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	2^-	↘	-1	↗	3	↘	
	2^+						

ទីតាំងក្រាប (c) នៃអនុគមន៍ f និង (Δ) ។ យើងប្រៀបធៀប $f(x)$ និង 2 ។ យើងបាន

$$f(x)-2=\frac{3x-9}{x^2-5x+7}$$

វិបាក :

ចំពោះ $x>3,\dfrac{3x-9}{x^2-5x+7}>0$ ដូច្នេះ $f(x)>2$ និង ក្រាប (c) នៅពីលើអាស៊ីមតូត (Δ) ។

ចំពោះ $x=3, f(x)=2$ ក្រាប (c) កាត់អាស៊ីមតូត (Δ) ត្រង់ចំណុច $(3,2)$ ។

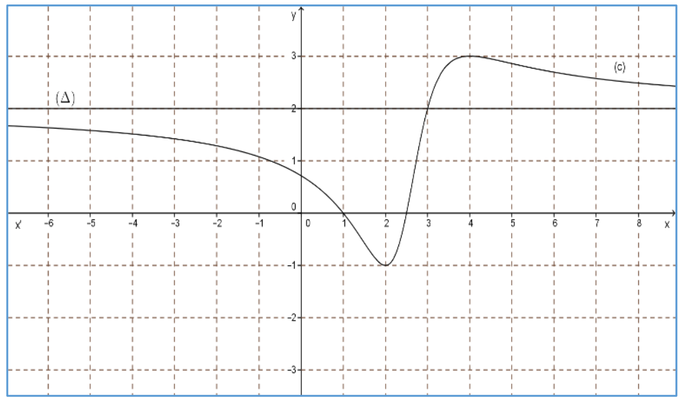
ចំពោះ $x<3,\dfrac{3x-9}{x^2-5x+7}<0$ ក្រាប (c) នៅខាងក្រោមអាស៊ីមតូត (Δ) ។

ក្រាប (c) កាត់ $x'ox: f(x)=0$

យើងបាន $x=1$ ឬ $x=\dfrac{5}{2}$

គេអាចប្រើ $f'(1)=-1$ និង

$f'\left(\dfrac{5}{2}\right)=4$



- សង់ក្រាបនៃ $f(x)$

3.សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2}$ ។

ចម្លើយ

- ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f :
  សមីការ $x^2-3x+2=0$ មានឫស $x'=1$ ឬ $x''=2$ ដូច្នេះដែនកំណត់ D នៃ f គឺ
  $D=\mathbb{R}-\{1,2\}$ ។
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ បន្ទាត់ (Δ) ដែលមានសមីការ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (c) របស់ f ។ $\lim\limits_{x\to1}(x^2+1)=2$ និង $\lim\limits_{x\to1}(x^2-3x+2)=0$
  យើងបាន $x^2-3x+2<0$ កាលណា $x\in(1,2)$
  $x^2-3x+2>0$ កាលណា $x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

  យើងបាន $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-\infty$

  $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to2^+} f(x)=+\infty$

  យើងបានបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=1$ និង $x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (c) ។
- អថេរភាព :

$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2}$ មានរាង $y=\dfrac{u}{v}$ យើងប្រើរូបមន្ត $y'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

យើងបាន $f'(x)=\dfrac{-3x^2+2x+3}{\left(x^2-3x+2\right)^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$ ឬ $x=\dfrac{1-\sqrt{10}}{3}$

$f'(x)>0$ ចំពោះ $\dfrac{1-\sqrt{10}}{3}<x<\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$

$f'(x)<0$ ចំពោះ $x<\dfrac{1-\sqrt{10}}{3}$ ឬ $x>\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$

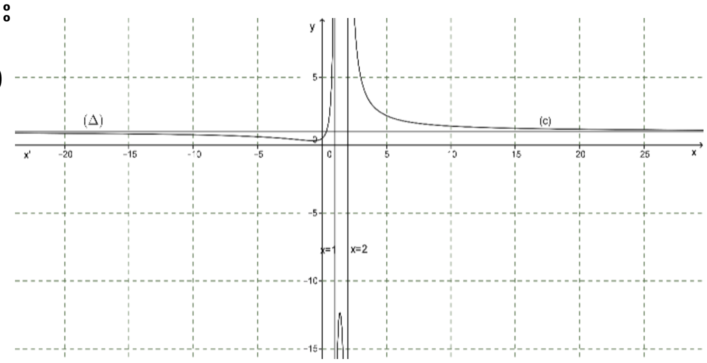
$f\left(\dfrac{1-\sqrt{10}}{3}\right)=-6+2\sqrt{10}$ និង $f\left(\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}\right)=-6-2\sqrt{10}$

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{10}}{3}$		1		$\frac{1+\sqrt{10}}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	1^- $\searrow$	$-6+2\sqrt{10}$	$\nearrow$ $+\infty$	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$	$-6-2\sqrt{10}$	$\searrow$ $-\infty$	$\Vert$	$+\infty$ $\searrow$	1^+

- សងក្រាបនៃ $f(x)$

ក្រាប (c) នៃ $f(x)$ បានមកពីការកំណត់ចំណុចនិងមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ ។ ត្រង់ចំណុច $A\left(x=0, y=\dfrac{1}{2}\right)$ យើងបាន $f'(0)=\dfrac{3}{4}$ ។ ទីតាំងនៃក្រាប (c) ធៀបនឹងបន្ទាត់ (Δ) ដែលមានសមីការ $y=1$ យើងបាន $f(x)-1=\dfrac{3x-1}{x^2-3x+2}$

វិបាក :ចំពោះ $\dfrac{1}{3}<x<1$ ឬ ចំពោះ $2<x$ យើងបាន $f(x)-1>0$ ឬ $f(x)>1$ ក្រាប (c) នៅលើបន្ទាត់ (Δ) ។



ចំពោះ $x=\dfrac{1}{3}, f(x)=1$

(c) និង (Δ) មានចំណុចរួម

ចំពោះ $x<\dfrac{1}{3}$ ឬ $1<x<2$, $f(x)-1<0$ ឬ $f(x)<1$ យើងបានក្រាប (c) នៅពីក្រោម (Δ)

4.គេមានអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=\dfrac{2x^2+x-2}{x+1}$

ក.កំណត់ចំនួនពិត a,b,c ដែល , $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$ ។

ខ.ទាញបង្ហាញថាបន្ទាត់ (Δ) ដែលមានសមីការ $y=2x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (c) តាងអនុគមន៍ f ខាង $+\infty$ និង ខាង $-\infty$ ។

គ.សិក្សាទីតាំងនៃ (Δ) និង (c) ។

ឃ.សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ f ។

ចម្លើយ

ក.កំណត់ចំនួនពិត a,b,c ដែល $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$

$$f(x)=\frac{ax^2+(b+a)x+b+c}{x+1}$$

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b+a=1\\b+c=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-1\\c=-1\end{cases}$$

ខ.តាមចម្លើយ (ក) យើងបាន $f(x)=2x-1-\dfrac{1}{x+1}$ យើងបាន $f(x)-(2x-1)=\dfrac{-1}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-1}{x+1}\right)=0$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-1}{x+1}\right)=0$ ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x-1)\right]=0$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x-1)\right]=0$ ដូច្នេះ បន្ទាត់ (Δ) ដែលមានសមីការ $y=2x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (c) តាងអនុគមន៍ f ។

គ.សិក្សាទីតាំង (Δ) និង (c) : $f(x)-(2x-1)=\dfrac{-1}{x+1}$

ចំពោះ $x\in(-\infty,-1)$ យើងបាន $\dfrac{-1}{x+1}>0$ វិបាក (c) នៅពីលើ (Δ)

ចំពោះ $x\in(-1,+\infty)$ យើងបាន $\dfrac{-1}{x+1}<0$ វិបាក (c) នៅពីក្រោម (Δ)

ឃ.សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x^2+x-2}{x+1}$

- ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}-\{-1\}$
- ទិសដៅអថេរភាព

  ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{2x^2+4x+3}{(x+1)^2}$ $\forall x\in D$, $2x^2+4x+3>0$ និង $(x+1)^2>0$ ។

  វិបាក : $f'(x)>0$ គ្រប់ $x\in D$

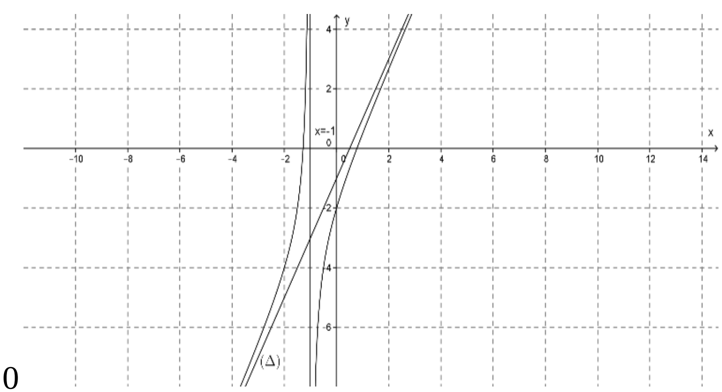
  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x-1-\dfrac{1}{x+1}\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-1-\dfrac{1}{x+1}\right)=+\infty$

  $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\left(2x-1-\dfrac{1}{x+1}\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(2x-1-\dfrac{1}{x+1}\right)=-\infty$
- តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

- សំណង់ក្រាប

  សង់អាស៊ីមតូត (Δ) ដែល
  មានសមីការ $y=2x-1$
  យើងដៅចំណុចដែលក្រាប
  (c) កាត់ $(y'oy)$ គឺ
  $x=0, y=-2, f'(0)=-3$
  យើងដៅចំណុចដែលក្រាប (c)
  កាត់ $(x'ox)$ គឺ $2x^2+x-2=0$



  $x'=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}; y=0$ ឬ $x''=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}; y=0$

  $x=-2; y=-4$

5.គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\ln\left(\dfrac{3x+1}{x-1}\right)$ ។ សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

ចម្លើយ

- ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f\ :\ \ln\left(\dfrac{3x+1}{x-1}\right)$ មានន័យលុះត្រាតែ $\dfrac{3x+1}{x-1}>0$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{3x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

ដូច្នេះ $D=(-\infty,-\frac{1}{3})\cup(1,+\infty)$

- ទិសដៅអថេរភាព

$$f(x)=\ln\left(\frac{3x+1}{x-1}\right)=\ln\left(u(x)\right)\ ,\ u(x)=\frac{3x+1}{x-1}\Rightarrow u'(x)=\frac{-4}{(x-1)^2}$$

យើងបាន $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}=\dfrac{-\dfrac{4}{(x-1)^2}}{\dfrac{3x+1}{x-1}}=\dfrac{-4}{(3x+1)(x-1)}$

យើងឃើញនៅលើ $D=(-\infty,-\frac{1}{3})\cup(1,+\infty)$, $f'(x)<0$ នោះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះលើ D ។

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+1}{x-1}=3$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+1}{x-1}=3$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left(\dfrac{3x+1}{x-1}\right)=\ln 3$ យើងបាន (Δ) ដែលមានសមីការ $y=\ln 3$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{3x+1}{x-1}=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to1^+}\ln\dfrac{3x+1}{x-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{3}\right)^-}\dfrac{3x+1}{x-1}=0^+\Rightarrow\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{3}\right)^-}\ln\dfrac{3x+1}{x-1}=-\infty$

បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=1$ និង $x=-\dfrac{1}{3}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

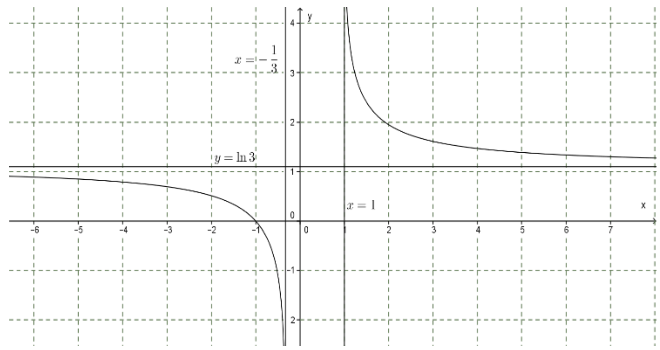
- តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$		$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$\ln 3$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$		$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\ln 3$

- សំណង់ក្រាប

$$f(x)=0 \Rightarrow \ln\frac{3x+1}{x-1}=0$$

ឬ $\frac{3x+1}{x-1}=1 \Leftrightarrow x=-1$



6.គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(-3,3)$

ដោយ $g(x)=\ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)$

ក.សិក្សាភាពគូ និង សេសនៃអនុគមន៍ g

ខ.a.គណនាលីមីតនៃ g ត្រង់ -3 និង 3

b.សិក្សាអថេរភាពនៃ g លើ $[0,3)$ រួចសង់តារាងអថេរភាពលើ $(-3,3)$

គ.លើតម្រុយអរតូណរមេគេមាន (c) ជាក្រាបនៃអនុគមន៍ g ក្នុងតម្រុយនេះ ។

a.កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ទៅនឹងក្រាប (c) ត្រង់ចំណុច o ។

b.សង់ក្រាប (c)និង បន្ទាត់ប៉ះ (T)ក្នុងតំរុយនេះ ។

ឃ.សិក្សាសញ្ញានៃ $g(x)$ ទៅតាមតម្លៃនៃ x ។

ង.a. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $h(x)=xg(x)$ ។

b.គណនា $\int_0^1 g(x)dx$ ។

ចម្លើយ :អនុគមន៍ g កំណត់លើ $(-3,+3)$ ដោយ $g(x)=\ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)$

ក.សិក្សាភាពគូ និង សេសនៃអនុគមន៍ g

បើ $x\in(-3,+3)$, $\frac{3+x}{3-x}$ វិជ្ជមាន , បើ $x\in(-3,+3)$ នោះ $(-x)$ នៅលើ $(-3,+3)$

យើងគណនា $g(-x)=\ln\frac{3-x}{3+x}=\ln\frac{1}{\frac{3+x}{3-x}}=-\ln\frac{3+x}{3-x}=-g(x)$

ចំពោះគ្រប់ $x\in(-3,+3)$; $g(-x)=-g(x)$ ដូច្នេះ g ជាអនុគមន៍សេស

ខ.a.គណនាលីមីតនៃ g ត្រង់ -3 និងត្រង់ $+3$

$\lim\limits_{x\to3}\frac{3+x}{3-x}=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to3}\ln\frac{3+x}{3-x}=+\infty$ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (c)

$\lim\limits_{x\to-3}\frac{3+x}{3-x}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to-3}\ln\frac{3+x}{3-x}=-\infty$ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=-3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (c)

b.សិក្សាអថេរភាពនៃ $g(x)$ លើ $[0,+3)$

$x\mapsto\frac{3+x}{3-x}$ មានដេរីវេលើ $(3,+3)$ ដូច្នេះ $g(x)=\ln\frac{3+x}{3-x}$ មានដេរីវេលើ $(3,+3)$

តាង $u(x)=\frac{3+x}{3-x}\Rightarrow u'(x)=\frac{6}{(3-x)^2}$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{\frac{6}{(3-x)^2}}{\frac{3+x}{3-x}}=\frac{6}{(3+x)(3-x)}$$

យើងឃើញថា $(3+x)(3-x)$ វិជ្ជមានលើ $(3,+3)$

ដូច្នេះ $g'(x)$ វិជ្ជមានលើ $(3,+3)$ និង g កើនលើ $(3,+3)$

- តារាងអថេរភាព

x	-3		$+3$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

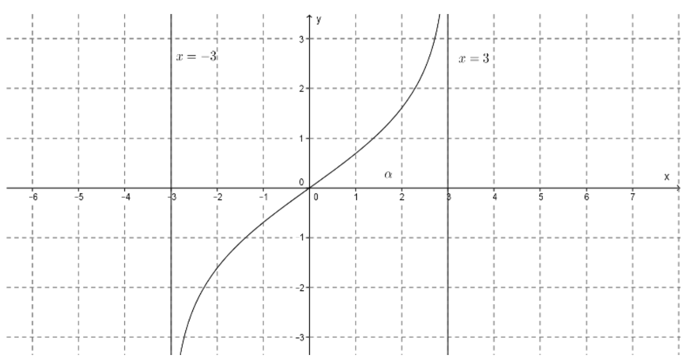
គ.a.កំណត់សមីការបន្ទាត់ ប៉ះ (T) ទៅនឹងក្រាប (c) ត្រង់ o ។

យើងបាន $g'(0)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) គឺ

$y=g'(0)(x-0)+g(0)$

ឬ $y=\frac{2}{3}x$



b.សង់ក្រាប(c) និងបន្ទាត់ប៉ះ(T)

ឃ. សិក្សាសញ្ញានៃ $g(x)$ ទៅតាមតម្លៃនៃ $x\in(-3,+3)$

យើងឃើញថា g ជាអនុគមន៍កើនលើ $(3,+3)$ និង $g(0)=0$

ចំពោះ $x\geq 0, g(x)>g(0)=0$, ចំពោះ $x<0; g(x)<g(0)=0$

ង.a. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $h(x)=x.g(x)$

$$h'(x)=g(x)+xg'(x)=\ln\frac{x+3}{x-3}+\frac{6x}{(3+x)(3-x)}$$

ដូច្នេះ $h'(x)=\ln\frac{x+3}{3-x}+\frac{6x}{(3+x)(3-x)}$

b.គណនា $I=\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1\ln\frac{3+x}{3-x}dx$

យើងប្រើលទ្ធផលខាងលើយើងបានព្រីមីទីវនៃ $\ln\frac{x+3}{3-x}+\frac{6x}{(3+x)(3-x)}$ គឺអនុគមន៍ $x\ln\frac{x+3}{3-x}$

$$\Rightarrow\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1\left[\ln\frac{3+x}{3-x}+\frac{6x}{(3+x)(3-x)}\right]dx-\int_0^1\frac{6x}{(3+x)(3-x)}dx$$

$$\Rightarrow\int_0^1 g(x)\,dx=\left[xg(x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{6x}{(3+x)(3-x)}dx$$

$$-\int_0^1\frac{6x}{(3+x)(3-x)}dx=3\int_0^1\frac{-2x}{9-x^2}=3\left[\ln\left(9-x^2\right)\right]_0^1=3\ln\frac{8}{9}$$

$$\int_0^1 g(x)dx=g(1)+3\ln\frac{8}{9}=\ln 2+3\ln\frac{8}{9}$$ ។

7. ក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតំរុយអរតូណរមេ $(o,\vec{i},\vec{j})$; (ឯកតា:2cm) ។

គេមានអនុគមន៍ f និង g កំណត់លើសំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R}$ ដោយ:

$f(x)=x-e^x$ និង $g(x)=(1-x)e^x$ និងគេតាង (c) និង (c') ក្រាបនៃអនុគម៍ f និង g នេះ។

ក.a.កំណត់លីមីតនៃអនុគម៍ f និង g ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$ ។

b.បង្ហាញថាបន្ទាត់ (Δ) ដែលមានសមីការ $y=x$ ជាអាសុីមតូតនៃក្រាប (c)។

c.សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និង អនុគមន៍ g លើ $\mathbb{R}$ ។

d.សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និង អនុគមន៍ g ។

ខ.ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេតាង $h(x)=f(x)-g(x)$

a.បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត x, $h'(x)=1-g(x)$ ។

b.ទាញយកទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ h លើសំណុំចំនួនពិត ។

c.ស្រាយបញ្ជាក់ថាក្រាប (c) និង (c') មានចំណុចប្រសព្វតែមួយគត់ដែលមានអាប់ស៊ីសរបស់វាតាងដោយ α នៅលើចន្លោះ $[1,2]$ ។ ចូរកំណត់តម្លៃអមនៃ α amplitude 10^{-1} ។

d.សិក្សាទៅតាមតម្លៃនៃ x ទីតាំងធៀបគ្នារវាង (c) និង (c') ។

គ.សង់បន្ទាត់ (Δ) និងក្រាប (c) និង (c') ។

ឃ.ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេតាង $\theta(x)=\int_0^x h(t)\,dt$

a.ប្រើអាំតេក្រាលដោយផ្នែកគណនា $\theta(x)$ ។

b.ទាញយកជារាងកន្សោមសនិទាននៃ α ផ្ទៃក្រឡាជា cm^2 នៃដែនដែលអមដោយក្រាប (c) និង (c') , អ័ក្សអរដោណេ និង បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=\alpha$ ។

ចម្លើយ:

គេមានអនុគមន៍ f និង g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x-e^x$ និង $g(x)=(1-x)e^x$; (c) និង (c') ជាក្រាបតាងអនុគមន៍ទាំងពីរនេះ។

ក.a.កំណត់លីមីត f ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$

- ត្រង់ $+\infty$

  $f(x)=x-e^x=x\left(1-\frac{e^x}{x}\right)$; យើងដឹងថា $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{e^x}{x}\right)=-\infty$

  និង $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{e^x}{x}\right)=-\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

- ត្រង់ $-\infty$

  $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ នោះយើងបាន $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-e^x)=-\infty$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

  កំណត់លីមីតនៃ g ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$

- ត្រង់ $+\infty$

  $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ នោះយើងបាន $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)e^x=-\infty$

  $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$

- ត្រង់ $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, $g(x) = e^x - xe^x$ នោះយើងបាន $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$

បន្ទាត់ $(x'ox)$ ដែលមានសមីការ $y=0$ ជាអាស៊ីមតូតនៃ (c') ។

b.បង្ហាញថាបន្ទាត់ (Δ) ដែលមានសមីការ $y=x$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (c) ។

យើងសិក្សាលីមីតនៃ $f(x)-x$ ។ $f(x)-x=-e^x$ យើងបាន $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=0$ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (c) ត្រង់ $-\infty$ ។

c.សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

$f(x)=x-e^x$ យើងបាន $f'(x)=1-e^x$

-ចំពោះ $x=0$, $f'(x)=0$

-ចំពោះ $x>0$, e^x ធំជាង 1 , ដូច្នេះ $f'(x)$ អវិជ្ជមានដាច់ខាត និង f ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតនៅលើ $(0,+\infty)$ ។

-ចំពោះ $x<0$, e^x តូចជាង 1 , ដូច្នេះ $f'(x)$ វិជ្ជមានដាច់ខាត និង f ជាអនុគមន៍កើននៅលើ $(-\infty,0)$ ។

សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g

$g(x)=(1-x)e^x$ យើងបាន $g'(x)=-e^x+(1-x)e^x=-xe^x$, $g'(x)$ មានសញ្ញាដូច $(-x)$

-ចំពោះ $x=0$, $g'(x)=0$

-ចំពោះ $x>0$, $-x<0$, ដូច្នេះ $g'(x)$ អវិជ្ជមានដាច់ខាតនិង g ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ ។

-ចំពោះ $x<0$, $-x>0$, ដូច្នេះ $g'(x)$ វិជ្ជមានដាច់ខាតនិង g ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(-\infty,0)$ ។

d.តារាងអថេរភាពនៃ f និង g

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

ខ.ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $h(x)=f(x)-g(x)$

a.បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត x , $h'(x)=1-g(x)$

យើងបាន $h'(x)=f'(x)-g'(x)=1-e^x+xe^x=1-e^x(1-x)=1-g(x)$

ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$, $h'(x)=1-g(x)$

b.ទាញយកទិសដៅអថេរភាពនៃ h លើ $\mathbb{R}$

យើងឃើញនៅចម្លើយខាងលើ g មានអតិបរមាត្រង់ $x=1$ ដូច្នេះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}^*$, $g(x)<1$ យើងទាញបានគ្រប់ $x\in\mathbb{R}^*,(1-g(x))$ វិជ្ជមានដាច់ខាតនិងសូន្យត្រង់ $x=0$, h ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ។

c.ស្រាយបញ្ជាក់ថាក្រាប (c) និង (c') មានចំនុចប្រសព្វតែមួយ ។

ដើម្បីរកចំណុចប្រសព្វនៃ (c) និង (c') យើងរកចំនួននៃឬសរបស់សមីការ

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$ ឬ $h(x)=0$ ។ យើងសិក្សាលីមីតនៃ h ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$

ដើម្បីរកចម្លើយនៃសមីការ $h(x)=0$ ។

- ត្រង់ $+\infty$

  $h(x)=f(x)-g(x)=x-e^x-e^x+xe^x=e^x\left(\dfrac{x}{e^x}-2+x\right)$

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$
- ត្រង់ $-\infty$

  $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0$ យើងបាន $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-g(x))=-\infty$

  ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=-\infty$

  h ជាអនុគមន៍មានដេរីវេលើ $\mathbb{R}$ និង កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ និង $h(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ ។ យើងទាញបាន h ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយពី $\mathbb{R}$ ទៅក្នុង $\mathbb{R}$ ។ 0 ជាធាតុមួយនៃ $\mathbb{R}$ ដូច្នេះវាមាន α តែមួយគត់នៃ $\mathbb{R}$ ដែល $h(\alpha)=0$ ។ សមីការ $h(x)=0$ មានឬសតែមួយគត់គឺ α ។ ក្រាប (c) និង (c') មានចំណុចប្រសព្វតែមួយគត់ដែលមានអាប់ស៊ីស α ។ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\alpha\in[1,2]$ ។ យើងគណនា :

  $h(1)=f(1)-g(1)=1-e=-1.71$, $h(2)=f(2)-g(2)=2-e^2+e^2=2$

  យើងបាន $h(1)<0=h(\alpha)<h(2)$, h ជាអនុគមន៍កើនលើ $\mathbb{R}$ យើងទាញបាន $1<\alpha<2$ ឬ $\alpha\in[1,2]$ ។ សិក្សាតម្លៃអមនៃ α ដែលមាន amplitude 10^{-1} : $h(1.6)=-0.3$, $h(1.7)=0.05$

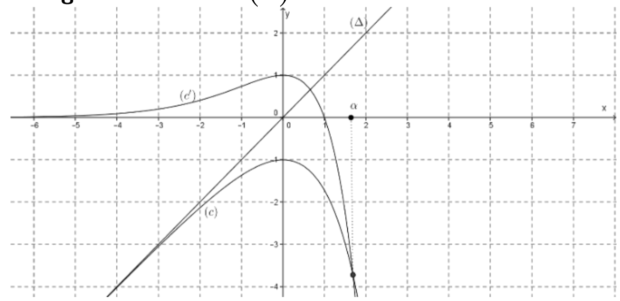
  $h(1.6)<0<h(1.7)$ ដូច្នេះ $1.6<\alpha<1.7$ ។

d.សិក្សាទៅតាមតម្លៃនៃ x ទីតាំងធៀបគ្នារវាង (c) និង (c') ។

យើងត្រូវសិក្សាសញ្ញានៃ $f(x)-g(x)$ ដូច្នេះគឺសញ្ញានៃ $h(x)$ ។ h ជាអនុគមន៍កើនលើ $\mathbb{R}$ និង

$h(\alpha)=0$, គ្រប់ $x<\alpha$, $h(x)<0$ និងគ្រប់ $x>\alpha$, $h(x)>0$ ។

ដូច្នេះយើងអាចសន្និដ្ឋានបានថា :



- ចំពោះ $x<\alpha, f(x)-g(x)<0$
  ដូច្នេះ ក្រាប (c) នៅក្រោម (c') ។
- ចំពោះ $x>\alpha, f(x)-g(x)>0$
  ដូច្នេះ ក្រាប (c) នៅលើ (c') ។

គ.សង់បន្ទាត់ (Δ) និងក្រាប (c) និង (c')

ឃ.ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេតាង $\theta(x)=\int_0^x h(t)dt$

a.គណនា $\theta(x)$

$$\theta(x)=\int_0^x h(t)dt=\int_0^x\left(t-e^t-e^t+te^t\right)dt$$

$$=\int_0^x\left(t-2e^t+te^t\right)dt=\int_0^t tdt-2\int_0^x e^t dt+\int_0^x te^t dt$$

ដូច្នេះ $\theta(x)=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x-2\left[e^t\right]_0^x+\int_0^x te^t dt=\frac{x^2}{2}-2\left(e^x-1\right)+\int_0^x te^t dt$

$I=\int_0^x te^t dt$ តាង $u(t)=t\Rightarrow u'(t)=1$, $v'(t)=e^t\Rightarrow v(t)=e^t$

$$I=\left[te^t\right]_0^x-\int_0^x e^t dt=xe^x-\left[e^t\right]_0^x=xe^x-e^x+1$$

$$\theta(x)=\frac{x^2}{2}-2\left(e^x-1\right)+xe^x-e^x+1=\frac{x^2}{2}+xe^x+3\left(1-e^x\right)$$

ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$, $\theta(x)=\frac{x^2}{2}+xe^x+3\left(1-e^x\right)$

b.គណនាជា cm^2 ផ្ទៃក្រឡានៃដែនដែលអមដោយ (c) និង (c') , អ័ក្សអរដោនេនិងបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=\alpha$ ។ ឯកតា $2cm$ ដូច្នេះឯកតាក្រឡាផ្ទៃគឺ $4cm^2$ ។ នៅលើ $[0,\alpha]$ យើងឃើញក្រាប (c) នៅក្រោម (c') ។ ផ្ទៃក្រឡាដែលត្រូវរកគឺ $S=\int_0^\alpha\left(g(x)-f(x)\right)dx$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា។

$$S=\left[-\int_0^\alpha\left(f(x)-g(x)\right)dx\right]\times 4cm^2$$

$$S=\left(-\theta(\alpha)\right)\times 4cm^2=4\left(-\frac{\alpha^2}{2}-\alpha e^\alpha+3e^\alpha-3\right)cm^2$$

យើងចង់បានកន្សោមសនិទាននៃ α យើងត្រូវបំបាត់ e^α ដែល α ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(\alpha)=g(\alpha)$

ដូច្នេះ $\alpha-e^\alpha=(1-\alpha)e^\alpha$ ឬ $e^\alpha(2-\alpha)=\alpha\Rightarrow e^\alpha=\dfrac{\alpha}{2-\alpha}$ (ពីព្រោះ $\alpha\neq 2$)

$$S=4\left[-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha}{2-\alpha}(3-\alpha)-3\right]cm^2=4\left(-\frac{\alpha^2}{2}+\alpha\frac{3-\alpha}{2-\alpha}-3\right)cm^2$$

$$S=\frac{2\left(\alpha^3-4\alpha^2+(2\alpha-12)\right)}{2-\alpha}$$

ចំនួនកុំផ្លិច

I. មេរៀនសង្ខេប

ក.ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងទម្រង់ពិជគណិត

-ចំនួនកុំផ្លិច $\boldsymbol{z = a + bi}$ ហៅថាទម្រង់ពិជគណិតនៃចំនួនកុំផ្លិច។

$\boldsymbol{a}$ ហៅថាផ្នែកពិត ហើយ $\boldsymbol{b}$ ហៅថាផ្នែកនិមិត្ត ដែល $\boldsymbol{a}$ និង $\boldsymbol{b}$ ជាចំនួនពិត និង $\boldsymbol{i^2 = -1}$ ។

-បើ $z_1 = a_1 + ib_1$ និង $z_2 = a_2 + ib_2$ នោះគេបាន

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (a_1 = a_2) \text{ និង } (b_1 = b_2)$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

-ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃចំនួនកុំផ្លិច $z = a + bi$ តាងដោយ $\bar{z} = a - ib$

-ចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយនៃចំនួនកុំផ្លិច $z = a + bi$ តាងដោយ $-z = -a - ib$

ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $z = a + ib$ តាងដោយចំណុច M មានកូអរដោនេ (a,b) ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ (xoy) ។ ចំពោះ $z = a + ib$ អាចតាងដោយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM}(a,b)$ គេថា $\overrightarrow{OM}$ ជាវ៉ិចទ័ររូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z = a + ib$ ។ ចំណុចក្នុងតម្រុយតាងចំនួនកុំផ្លិច ប្លង់ដែលប្រដាប់ដោយតម្រុយនេះហៅថាប្លង់កុំផ្លិច ។ អ័ក្ស $(x'ox)$ ជាអ័ក្សផ្នែកពិត ហើយអ័ក្ស $(y'oy)$ ហៅថាអ័ក្សផ្នែកនិមិត្ត ។ ផលបូកនៃចំនួនកុំផ្លិចមានរូបភាពជាផលបូកវ៉ិចទ័រក្នុងប្លង់កុំផ្លិច ។

ខ.ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

-បើគេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = a + bi$ នោះម៉ូឌុលនៃ z តាងដោយ

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

-បើ z ជាចំនួនកុំផ្លិចនោះ $|z| = |\bar{z}| = |-z|$

-បើ z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចនោះគេបាន $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad ; \quad |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

-វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM}$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z តាង φ ជាមុំតូចបំផុតនៃ $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$

φ ហៅថាអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច z ។ ដើម្បីគណនាមុំ φ យើងត្រូវដោះ

ស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ :

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{r} \\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{r} \end{cases}$$

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ហៅថាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច $z = a + ib$

-បើ $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ និង $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ នោះគេបាន

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)]$; n ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប

បម្លែងវិលជុំវិញគល់តម្រុយនៃប្លង់កុំផ្លិចជាទូទៅមានចំនួនកុំផ្លិច $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$

បើ $M'(z')$ ជារូបភាពនៃ $M(z)$ តាមបម្លែងវិលផ្ចិត O (O ជាគល់តម្រុយ) នឹងមុំ α នោះ

$z' = (\cos\alpha + i\sin\alpha)z$ ។

គ.ស្វ័យគុណ n និង ឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$ (ទ្រឹស្តីបទដឺម័រ)(Moivre)

-បើ $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ជាចំនួនកុំផ្លិចមិនសូន្យ ហើយ $\boldsymbol{n}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

នោះ z មាន n ឫសទី n គឺ $w_0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$ កំណត់ដោយ :

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right] \text{ ដែល } k = 0, 1, 2, \cdots, (n-1)$$

ឃ. អនុវត្តន៍ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងធរណីមាត្រ

-ជាទូទៅ បើ $A(z_1)$ និង $B(z_2)$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 នោះចម្ងាយ

$AB = |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|$ ។

-ជាទូទៅ បើគេមាន z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលមានរូបភាពរៀងគ្នា $A(z_1)$ និង $B(z_2)$ ហើយ

ចំណុច $P(z)$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z ដែល P ស្ថិតនៅលើ AB ហើយចែក AB តាមផលធៀប

$m:n$ នោះគេបាន $z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$ ដែល $\lambda=\frac{m}{n}$ ។

– ជាទូទៅ បើ $A(z)$, $B(z_1)$ និង $C(z_2)$ បង្កើតបានត្រីកោណ ABC នោះគេបាន

$\frac{AC}{AB}=\left|\frac{z_2-z}{z_1-z}\right|$ ហើយ $\angle BAC=\arg\left(\frac{z_2-z}{z_1-z}\right)$

II. លំហាត់គំរូ

កំណត់សម្គាល់ : អ្នកសិក្សាត្រូវខំប្រឹងដោះស្រាយលំហាត់ដោយខ្លួនឯង ចំណែកចម្លើយសម្រាប់តែផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

1.គណនា z_1+z_2 , z_1-z_2 , z_1z_2 និង $\frac{z_1}{z_2}$

ក. $z_1=-3$; $z_2=2-i$ ខ. $z_1=\sqrt{3}+i\sqrt{2}$; $z_2=-i\sqrt{2}$

គ. $z_1=2-i\sqrt{3}$; $z_2=2+i\sqrt{3}$

ចម្លើយ

ក. $z_1+z_2=-1-i$

$$z_1-z_2=-3-(2-i)=-3-2+i=-5+i$$

$$z_1z_2=-3(2-i)=-6+i3$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{-3}{2-i}=\frac{-3(2+i)}{4-i^2}=\frac{-3(2+i)}{4+1}=\frac{-3}{5}(2+i)=-\frac{6}{5}-i\frac{3}{5}$$

ខ. $z_1=\sqrt{3}+i\sqrt{2}$; $z_2=-i\sqrt{2}$

$$z_1+z_2=\left(\sqrt{3}+i\sqrt{2}\right)+\left(-i\sqrt{2}\right)=\sqrt{3}$$

$$z_1-z_2=\left(\sqrt{3}+i\sqrt{2}\right)-i\sqrt{2}=\sqrt{3}+i\sqrt{2}+i\sqrt{2}=\sqrt{3}+i2\sqrt{2}$$

$$z_1z_2=\left(\sqrt{3}+i\sqrt{2}\right)\left(-i\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{3}\right)\left(-i\sqrt{2}\right)+\left(i\sqrt{2}\right)\left(-i\sqrt{2}\right)$$

$$=-i\sqrt{6}-i^2\left(\sqrt{2}\right)^2=2-i\sqrt{6}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\left(\sqrt{3}+i\sqrt{2}\right)}{\left(-i\sqrt{2}\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}+i\sqrt{2}\right)\left(-i\sqrt{2}\right)}{\left(-i\sqrt{2}\right)}=\frac{-i\sqrt{6}+\left(i\sqrt{2}\right)\left(-i\sqrt{2}\right)}{2i^2}$$

$$=\frac{\left(-i\sqrt{6}+2\right)}{-2}=-1+i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

គ. $z_1=2-i\sqrt{3}$, $z_2=2+i\sqrt{3}$

$$z_1+z_2=\left(2-i\sqrt{3}\right)+\left(2+i\sqrt{3}\right)=4$$

$$z_1-z_2=\left(2-i\sqrt{3}\right)-\left(2+i\sqrt{3}\right)=-i2\sqrt{3}$$

$z_1 z_2 = (2 - i\sqrt{3})(2 + i\sqrt{3}) = 4 - i^2(\sqrt{3})^2 = 4 + 3 = 7$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2-i\sqrt{3})}{(2+i\sqrt{3})} = \frac{(2-i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3})}{(2+i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3})} = \frac{4-2\times2(i\sqrt{3})+(i\sqrt{3})^2}{7} = \frac{4-i4\sqrt{3}-3}{7}$

$= \frac{1-i4\sqrt{3}}{7} = \frac{1}{7} - i\,\frac{4\sqrt{3}}{7}$

2.សរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ពិជគណិត $a + ib$

ក. $z = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$ ខ. $z = (3 + i)(5 - 2i)$

គ. $z = (4 - 7i)^3$ ឃ. $z = \frac{6-7i}{1+i}$

ចម្លើយ

ក. $z = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})(\sqrt{2}+i\sqrt{2})}{(\sqrt{2}-i\sqrt{2})(\sqrt{2}+i\sqrt{2})} = \frac{2+i4-2}{2+2} = i$

ខ. $z = (3 + i)(5 - 2i) = 15 - 6i + 5i - 2i^2 = 17 - i$

គ. $z = (4 - 7i)^3$

យើងប្រើឯកលក្ខណ:ភាព $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$z = (4 - 7i)^3 = 4^3 - 3 \times 4^2 \times 7i + 3 \times 4 \times (7i)^2 - (7i)^3$

$= 64 - 336i - 588 + 343i$

យើងបាន $z = -524 + 7i$

ឃ. $z = \frac{6-7i}{1+i} = \frac{(6-7i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{6-6i-7i+7i^2}{1-i^2} = \frac{-1-13i}{2} = \frac{-1}{2} - \frac{13}{2}i$

3.សរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ក. $z = \sqrt{3} + i$ ខ. $z = 1 + i$

គ. $z = 1 - i\sqrt{3}$ ឃ. $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ចម្លើយ

ក. $z = \sqrt{3} + i = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})$

យើងអាចទាញបាន $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $\sin\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$

ដូច្នេះ $z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

យើងបាន z មានម៉ូឌុល 2 និង អាគុយម៉ង់ $\frac{\pi}{6}$

របៀបម្យ៉ាងទៀតតាមរូបមន្ត

$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$

$\cos\varphi=\frac{a}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\varphi=\frac{b}{r}=\frac{1}{2}$ យើងបាន $\varphi=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$

ដូច្នេះ $\mathrm{z}=2\left(\cos\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{6}}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$

ខ. $z=1+i$

$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\begin{cases}\cos\varphi=\frac{a}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\varphi=\frac{b}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \Rightarrow \quad \varphi=\frac{\pi}{4}$

ដូច្នេះ $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

គ. $z=1-i\sqrt{3}$

$r=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$

$\begin{cases}\cos\varphi=\frac{1}{2}\\ \sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \Rightarrow \quad \varphi=-\frac{\pi}{3}$

ដូច្នេះ $z=2[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)]$

ឃ. $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$r=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{1}=1\ ,\begin{cases}\cos\varphi=\frac{-\frac{1}{2}}{1}=-\frac{1}{2}\\ \sin\varphi=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \Rightarrow \quad \varphi=\frac{2\pi}{3}$

ដូច្នេះ $z=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

4. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z=\frac{z+2-i}{z+i}$

គេឲ្យ $z=a+ib$ និង $z\neq -i$

ក. សរសេរ Z ជាទម្រង់ពិជគណិតជាអនុគមន៍នៃ a និង b

ខ. រកទំនាក់ទំនងរវាង a និង b ដើម្បីឲ្យ Z ជាចំនួនពិត

គ. រកទំនាក់ទំនងរវាង a និង b ដើម្បីឲ្យ Z ជាចំនួននិមិត្ត

ចម្លើយ

ក. សរសេរ Z ជាទម្រង់ពិជគណិតជាអនុគមន៍នៃ a និង b

$$Z=\frac{a+ib+2-i}{a+ib+i}=\frac{(a+2)+i(b-1)}{a+i(b+1)}=\frac{[(a+2)+i(b-1)][a-i(b+1)]}{[a+i(b+1)][a-i(b+1)]}$$

$$=\frac{a(a+2)-i^2(b-1)(b+1)+ia(b-1)-i(a+2)(b+1)}{a^2+(b+1)^2}$$

$$=\frac{a(a+2)+(b-1)(b+1)}{a^2+(b+1)^2}+i\frac{-2(a+b+1)}{a^2+(b+1)^2}$$

ខ. Z ជាចំនួនពិតលុះត្រាតែផ្នែកនិមិត្តស្មើ 0 យើងបាន $-2(a+b+1)=0$ និង ($a\neq 0$និង$b\neq -1$)

ដូច្នេះ ទំនាក់ទំនងរវាង a និង b ដើម្បីឲ្យ Z ជាចំនួនពិតគឺ $a+b+1=0$ និង ($a\neq 0$ និង $b\neq -1$)

គ. Z ជាចំនួននិមិត្តលុះត្រាតែផ្នែកពិតស្មើ 0 យើងបាន $a^2+b^2+2a-1=0$ និង ($a\neq 0$ និង $b\neq -1$)

ដូច្នេះ ទំនាក់ទំនងរវាង a និង b ដើម្បីឲ្យ Z ចំនួននិមិត្តគឺ $a^2+b^2+2a-1=0$និង($a\neq 0$ និង $b\neq -1$)

5. ក. ដោះស្រាយនៅក្នុង $\mathbb{C}$ សមីការ $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$

យើងតាង z_1 ជាឫសរបស់សមីការដែលផ្នែកនិមិត្តវិជ្ជមាននិង z_2 ជាឫសមួយទៀត។

ខ. a.កំណត់ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2

b.កំណត់ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$

ចម្លើយ

ក. ដោះស្រាយនៅក្នុង $\mathbb{C}$ សមីការ $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$

$$\Delta=\left(2\sqrt{2}\right)^2-4\times 1\times 4=8-16=-8=\left(i\sqrt{8}\right)^2=\left(2i\sqrt{2}\right)^2$$

$$z_1=\frac{2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}+i\sqrt{2}\ ;\quad z_2=\frac{2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$$

ខ.a.កំណត់ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់ z_1 និង z_2

$$z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}\ ;\ |z_1|=r_1=\sqrt{2+2}=2\ \text{និង}\begin{cases}\cos\theta_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow\quad\theta_1=\frac{\pi}{4}$$

យើងបានទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ $z_1 = 2\left(cos\frac{\pi}{4} + sin\frac{\pi}{4}\right)$

$z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$; $|z_2| = r_2 = \sqrt{2+2} = 2$ និង $\begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = -\frac{\pi}{4}$

យើងបានទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ $z_2 = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$

b. កំណត់ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{2}[\cos\left(\frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4})\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4})\right)] = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^2 = \cos\pi + i\sin\pi$

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$ មានម៉ូឌុល $\left|\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2\right| = 1$ និង អាគុយម៉ង់ស្មើ π

6. កំណត់ $\cos 3\theta$ និង $\sin 3\theta$ ជាអនុគមន៍នៃ $\cos\theta$ និង $\sin\theta$ ។

ចម្លើយ

យើងប្រើទ្រឹស្តីបទដឺម័រ : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

$n = 3$ យើងបាន $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$

ម្យ៉ាងទៀត $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$

ព្រោះ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \left(\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta\right) + i\left(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right)$

យើងបាន $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = \cos^3\theta - 3(\cos\theta)\left(1-\cos^2\theta\right) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\left(1-\sin^2\theta\right)\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

7. ក.គណនា i^n ចំពោះតម្លៃនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $n \geq 1$ ។

ខ.ទាញរកតម្លៃ i^{2014}

ចម្លើយ

ក. ចំពោះ $n=1$ $i=i$

ចំពោះ $n=2$ $i^2=-1$

ចំពោះ $n=3$ $i^3=i^2\times i=-1\times i=-i$

ចំពោះ $n=4$ $i^4=i^3\times i=-i^2=1$

ចំពោះ $n=5$ $i^5=i^4\times i=1\times i=i$

យើងឃើញមានខួបស្មើ 4 សម្រាប់ស្វ៊ីតនៃស្វ័យគុណរបស់ $\boldsymbol{i}$

ដូច្នេះ បើ $n=4k$ ចំពោះ k ជាចំនួនគត់រឺឡាទីបវិជ្ជមាននោះ $i^{4k}=1$

បើ $n=4k+1$ ចំពោះ k ជាចំនួនគត់រឺឡាទីបវិជ្ជមាននោះ $i^{4k+1}=i$

បើ $n=4k+2$ ចំពោះ k ជាចំនួនគត់រឺឡាទីបវិជ្ជមាននោះ $i^{4k+2}=-1$

បើ $n=4k+3$ ចំពោះ k ជាចំនួនគត់រឺឡាទីបវិជ្ជមាននោះ $i^{4k+3}=-i$

ខ.ទាញយកពីលទ្ធផលខាងលើគណនា i^{2014}

តាមវិធីចែកអឺក្លីដ 2014 ដោយ 4 យើងបាន $2014=503\times 4+2$

ដូច្នេះ $i^{2014}=i^{4k+2}$ ដែល $k=503$

វិបាក $i^{2014}=-1$

8.ដោះស្រាយនៅក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$ សមីការ $(E):(z^2+1)(z^2+2)=0$

ចម្លើយ

$(E):(z^2+1)(z^2+2)=0$ ដោយគិតដល់ $i^2=-1$

$(E)\Leftrightarrow(z^2-i^2)(z^2-2i^2)=0\Leftrightarrow(z-i)(z+i)\left(z+i\sqrt{2}\right)\left(z-i\sqrt{2}\right)=0$

យើងបានឫសរបស់សមីការ $z_1=i$; $z_2=-i$; $z_3=-i\sqrt{2}$; $z_4=i\sqrt{2}$

9.គេកំណត់នៅក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$ សមីការ (E): $z^3+8=0$

ក.កំណត់ចំនួនពិត a,b,c ដើម្បីឲ្យ $z^3+8=(z+2)\left(az^2+bz+c\right)$

ខ.ដោះស្រាយសមីការ $z^3+8=0$

គ.សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ឬស z_1,z_2,z_3 របស់សមីការ (E)

ចម្លើយ

ក.កំណត់ចំនួនពិត a,b,c ដើម្បីឲ្យ $z^3+8=(z+2)(z^2-2z+4\,)$

(ប្រើឯកលក្ខណះភាព $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$)

$(z+2)(az^2+bz+c)=az^3+(b+2a)z^2+(c+2b)z+2c$

$z^3+8=az^3+(b+2a)z^2+(c+2b)z+2c$

យើងបាន $\begin{cases} a=1 \\ b+2a=0 \\ c+2b=0 \\ 2c=8 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=4 \end{cases}$

$z^3+8=(z+2)(z^2-2z+4)$

ខ.ដោះស្រាយសមីការ $z^3+8=0$

$z^3+8=0 \quad \Leftrightarrow \quad (z+2)(z^2-2z+4)=0 \Leftrightarrow z=-2$ ឬ $z^2-2z+4=0$

$\Leftrightarrow\ z=-2$ ឬ $(z-1)^2=-3\ \Leftrightarrow\ z=-2$ ឬ $(z-1)^2=\left(i\sqrt{3}\right)^2$

$\Leftrightarrow\ z=-2$ ឬ $z-1=i\sqrt{3}$ ឬ $z-1=-i\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow\ z=-2$ ឬ $z=1+i\sqrt{3}$ ឬ $z=1-i\sqrt{3}$

ចម្លើយរបស់សមីការគឺ : $z_1=-2\quad;\quad z_2=1+i\sqrt{3}\ ;\ z_3=1-i\sqrt{3}$

គ.សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ឫសរបស់សមីការ (E)

$z_1=-2=2(-1+i0)=2(\cos\pi+i\sin\pi)$

$z_2=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$z_3=1-i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2[\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})]$

10.ដោះស្រាយសមីការ $z^3+8=0$

ចម្លើយ

$z^3+8=0\Rightarrow z^3=-8$ ឬ $z=\sqrt[3]{-8}$

$-8=-8+0i$ មានម៉ូឌុល $r=\sqrt{(-8)^2+0}=8$

ដោយ $\cos\varphi=\frac{a}{r}=\frac{-8}{8}=-1$ និង $\sin\varphi=\frac{b}{r}=\frac{0}{8}=0$ យើងបាន $\varphi=\pi$

វិបាក : $-8=8(\cos\pi+i\sin\pi)$

ឫសទី 3 នៃ -8 កំណត់ដោយ $w_k=\sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)\right]$, $k=0,1,2$

បើ $k=0\Rightarrow w_0=2\left[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right]=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3}$

បើ $k=1\Rightarrow w_1=2\left[\cos\pi+i\sin\pi\right]=-2$

បើ $k=2\Rightarrow w_2=2\left[\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right]=1-i\sqrt{3}$

11.ក.សរសេរជាទម្រង់ពិជគណិតចំនួនកុំផ្លិច $(1+2i)^2$ និង $(3-2i)^3$

ខ.សរសេរជាទម្រង់ពិជគណិតផលបូក S ដែល :

$S=(2+i)+(2+2i)+(2+3i)+\cdots+(2+2001i)+(2+2002i)$

ចម្លើយ

ក. $(1+2i)^2=1+4i+(2i)^2=1+4i-4=-3+4i$ គេបាន $(1+2i)^2=-3+4i$

$(3-2i)^3=27-3\times9\times2i+3\times3\times(-4)-8\times(-i)=-9-46i$

គេបាន $(3-2i)^3=-9-46i$

ខ.សរសេរជាទម្រង់ពិជគណិតនៃផលបូក S មាន 2002 តួ ដែលបំបែកជាពីផលបូក :

$$S=2002\times2+\left(\underbrace{i+2i+3i+\cdots+2001i+2002i}_{S'}\right)$$

S' ជាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួមស្មើ i

$$S'=\frac{(i+2002i)2002}{2}=2003i\times1001=2005003i$$

ដូច្នេះ $S=4004+2005003i$

12.គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=2-3i$ និង $z_2=-4+5i$ ដែលមានរូបភាព $A(z_1)$ និង $B(z_2)$

ក.រកចំនួនកុំផ្លិចតាងអោយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$

ខ.រកចំនួនកុំផ្លិចដែលមានរូបភាពចំណុចកណ្តាល I នៃ [AB]

ចម្លើយ

ក.យើងកំណត់សរសេរ $z\left(\overrightarrow{AB}\right)$ ចំនួនកុំផ្លិចតាងអោយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$

$$z\left(\overrightarrow{AB}\right)=z_B-z_A=z_2-z_1=-4+5i-\left(2-3i\right)=-6+8i$$

ខ.យើងកំណត់សរសេរ $z\left(I\right)$ ចំនួនកុំផ្លិចដែលមានរូបភាព I

$$z\left(I\right)=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{2-3i-4+5i}{2}=\frac{-2+2i}{2}=-1+i$$

13.នៅក្នុង $\mathbb{C}$ គេមានសមីការ $z^2+\left(4\cos\alpha\right)z+4\cos 2\alpha+2=0$ ដែល $\alpha\in(-\pi,\pi)$ ។

ក.កំណត់តម្លៃនៃ α ដើម្បីឲ្យចម្លើយរបស់សមីការជាចំនួនពិត ។

ខ.គេឲ្យ $\alpha=\frac{5\pi}{6}$ ។ ដោះស្រាយសមីការខាងលើដោយឲ្យចម្លើយជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ចម្លើយ

ក.ដើម្បីឲ្យចម្លើយរបស់សមីការជាចំនួនពិតវាត្រូវតែ $\Delta\geq 0$ ។

យើងគណនា Δ:

$$\Delta=b^2-4ac=\left(4\cos\alpha\right)^2-4\left(4\cos 2\alpha+2\right)=16\cos^2\alpha-16\cos 2\alpha-8$$

តែ $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

ដូច្នេះ $\Delta=16\cos^2\alpha-32\cos^2\alpha+16-8=-16\cos^2\alpha+8$

$$=16\left(\frac{1}{2}-\cos^2\alpha\right)=16\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos\alpha\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\alpha\right)$$

$\Delta\geq 0\Leftrightarrow \cos\alpha\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ ឬ $\alpha\in\left[-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$

ខ. $\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

តាមសំណួរខាងលើយើងបាន :

$$\Delta=-16\cos^2\alpha+8=-16\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+8=-16\times\frac{3}{4}+8=-4=4i^2$$

សមីការមានឫសកុំផ្លិចពីរឆ្លាស់គ្នា

$$z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2i}{2}=\sqrt{3}+i\ ;\ z_2=\overline{z}_1=\sqrt{3}-i$$

យើងបានសំណុំចម្លើយ $S=\left\{\sqrt{3}+i,\sqrt{3}-\mathrm{i}\right\}$

សរសេរ z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$|z_1|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2$$

តាង α_1 អាគុយម៉ង់នៃ z_1

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha_1=\frac{a}{|z_1|}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\alpha_1=\frac{b}{|z_1|}=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\text{ យើងបាន } \alpha_1=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ $z_1=2\left[\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right]$

សរសេទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z_2

$|z_2|=|\overline{z}_1|=|z_1|=2$, អាគុយម៉ង់នៃ $z_2=\arg\overline{z}_1=-\arg z_1+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

យើងបានទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z_2 គឺ $z_2=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$ ។

14. ក.គណនា i^2,i^3,i^4,i^5 រួចរក i^n ជាអនុគមន៍នៃតម្លៃចំនួនគត់ រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន n ។

ខ.សរសេរ $\frac{1}{i}$ ជាទម្រង់ពិជគណិត រួចសរសេរ $\frac{1}{i^n}$ ជាអនុគម៍នៃតម្លៃចំនួនគត់ រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន n ។

ចម្លើយ

ក. យើងបាន :

$$i^2=-1,i^3=i\times i^2=-i,i^4=i\times i^3=-i^2=1,i^5=i\times i^4=i$$

យើងសង្កេតឃើញថា $i,-1,-i$ និង 1 កើតឡើងវិញដដែលៗ ។

បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន p ; $i^{4p}=1,i^{4p+1}=i,i^{4p+2}=-1,i^{4p+3}=-i$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន p : $i^{4p}=\left(i^4\right)^p=1^p=1$

$$i^{4p+1}=i^{4p}\times i^{1}=1\times i^{1}=i$$

$$i^{4p+2}=i^{4p}\times i^{2}=1\times(-1)=-1$$

$$i^{4p+3}=i^{4p}\times i^{3}=1\times(-i)=-i$$

ខ. $i^2=-1$ នាំឲ្យ $i\times i=-1$ គេបាន $\frac{1}{i}=-i$ គេអាចសរសេរ $i^{-1}=-i$

ដោយ $\frac{1}{i^n}=i^{-n}=\left(i^{-1}\right)^n$, $\frac{1}{i^n}=(-i)^n=(-1)^n\times i^n$

យើងបាន $\frac{1}{i^{4p}}=(-1)^{4p}\cdot i^{4p}=1$; $(n=4p)$

$$\frac{1}{i^{4p+1}}=(-1)^{4p+1}\cdot i^{4p+1}=-1\times i=-i\ ;\ (n=4p+1)$$

$$\frac{1}{i^{4p+2}}=(-1)^{4p+2}\cdot i^{4p+2}=1\times(-1)=-1\ ;\ (n=4p+2)$$

$$\frac{1}{i^{4p+3}}=(-1)^{4p+3}\cdot i^{4p+3}=(-1)\times(-i)=i\ ;\ (n=4p+3)$$

កោនិក

I. មេរៀនសង្ខេប

1. ប៉ារ៉ាបូល

ក. សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូលជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេ

កំពូល	កំណុំ	បន្ទាត់ប្រាប់ទិស	សមីការស្តង់ដា	ពណ៌នា
$(0,0)$	$(p,0)$	$x=-p$	$y^2=4px$	• អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស • $p>0$ ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $x>0$ • $p<0$ ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $x<0$
$(0,0)$	$(0,p)$	$y=-p$	$x^2=4py$	• អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអរដោនេ • $p>0$ ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $y>0$ • $p<0$ ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $y<0$

ខ. សមីការស្តងដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូលខុសពីគល់អ័ក្សកូអរដោនេ

កំពូល	កំណុំ	បន្ទាត់ប្រាប់ទិស	សមីការស្តង់ដា	ពណ៌នា
(h,k)	$(h+p,k)$	$x=h-p$	$(y-k)^2=4p(x-h)$	• អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សដេក • $p>0$ ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $x>0$ • $p<0$ ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $x<0$
(h,k)	$(h,k+p)$	$y=k-p$	$(x-h)^2=4p(y-k)$	• អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរ • $p>0$ ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $y>0$ • $p<0$ ប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $x<0$

2. អេលីប

ក. សមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមានផ្ចិតជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេ

ផ្ចិត	អ័ក្សធំ	កំណុំ	កំពូល	សមីការស្តង់ដា
$(0,0)$	នៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស	$(\pm c,0)$	$(\pm a,0)$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $a>b>0$ ដែល $c^2=a^2-b^2$
$(0,0)$	នៅលើអ័ក្សអរដោនេ	$(0,\pm c)$	$(0,\pm a)$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ $a>b>0$ ដែល $c^2=a^2-b^2$

ខ. សមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមានកំពូលខុសពីគល់អ័ក្សកូអរដោនេ

ផ្ចិត	អ័ក្សធំ	កំណុំ	កំពូល	សមីការស្តង់ដា
(h,k)	ជាអ័ក្សដេក	$(h\pm c,k)$	$(h\pm a,k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $a>b>0$ ដែល $c^2=a^2-b^2$
(h,k)	ជាអ័ក្សឈរ	$(h,k\pm c)$	$(h,k\pm a)$	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ $a>b>0$ ដែល $c^2=a^2-b^2$

3. អ៊ីពែបូល

ក. សមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិតជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេ

ផ្ចិត	អ័ក្សទទឹង	កំណុំ	កំពូល	សមីការស្តង់ដា	អាស៊ីមតូត
$(0,0)$	នៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស	$(c,0)$ និង $(-c,0)$	$(a,0)$ និង $(-a,0)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $c^2=a^2+b^2$	$y=\frac{b}{a}x$ និង $y=-\frac{b}{a}x$

$(0,0)$	នៅលើអ័ក្សអរដោនេ	$(0,c)$ និង $(0,-c)$	$(0,a)$ និង $(0,-a)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ $c^2=a^2+b^2$	$y=\frac{a}{b}x$ និង $y=-\frac{a}{b}x$

ខ.សមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិតខុសពីគល់អ័ក្សកូអរដោនេ

ផ្ចិត	អ័ក្សទទឹង	កំណុំ	កំពូល	សមីការស្តង់ដា	អាស៊ីមតូត
(h,k)	ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស	$(h+c,k)$ និង $(h-c,k)$	$(h+a,k)$ និង $(h-a,k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $c^2=a^2+b^2$	$y=k+\frac{b}{a}(x-h)$ និង $y=k-\frac{b}{a}(x-h)$
(h,k)	ស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ	$(h,k+c)$ និង $(h,k-c)$	$(h,k+a)$ និង $(h,k-a)$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ $c^2=a^2+b^2$	$y=k+\frac{a}{b}(x-h)$ និង $y=k-\frac{a}{b}(x-h)$

II. លំហាត់គំរូ

កំណត់សម្គាល់ : អ្នកសិក្សាត្រូវខំប្រឹងដោះស្រាយលំហាត់ដោយខ្លួនឯង ចំណែកចម្លើយសម្រាប់តែផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

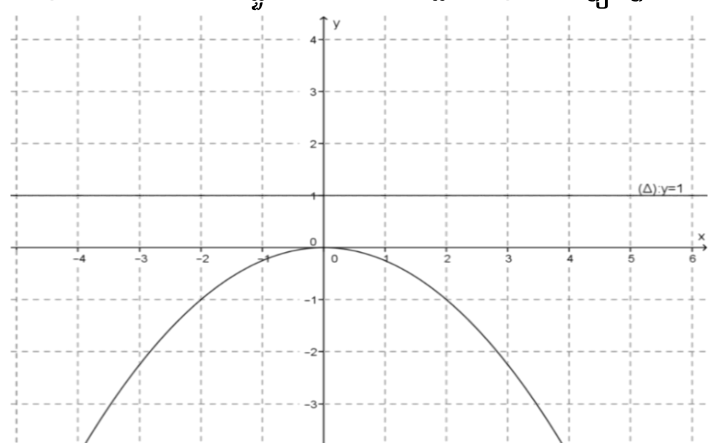
1.រកសមីការស្តង់ដានៃ

ប៉ារ៉ាបូល ដែលមាន

កំណុំត្រង់ចំណុច $F(0,-1)$

និងបន្ទាត់ប្រាប់ ទិស $y=1$។

សង់ក្រាប ។



ចម្លើយ

កំណុំ F ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ

នោះអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអរដោនេ។ ដោយកំពូលស្ថិតនៅលើអ័ក្សឆ្លុះនិងជាចំណុច

កណ្តាលរវាងកំណុំនិងចំនុចប្រសព្វរវាង បន្ទាត់ប្រាប់ទិសនិងអ័ក្សឆ្លុះនោះកំពូលមានកូអរដោនេ $(0,0)$ ។

យើងបានកំពូលជាគល់ អ័ក្សកូអរដោនេ ដូច្នេះប៉ារ៉ាបូល មានសមីការ $x^2=4py$,

$F(0,p)=F(0,-1)\Rightarrow p=-1$

យើងបាន $x^2=-4y$ ប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច $(2,-1);(-2,-1)$ ។

2.ប៉ារ៉ាបូលមួយមានកំពូលនៅត្រង់ចំណុច $O(0,0)$ និងកំណុំ F ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

ក.រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលបើវាកាត់តាមចំណុច $A(8,8)$ ។

ខ.រកតម្លៃនៃ x_1 បើចំណុច $B(x_1,-4)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល។ សង់ក្រាប ។

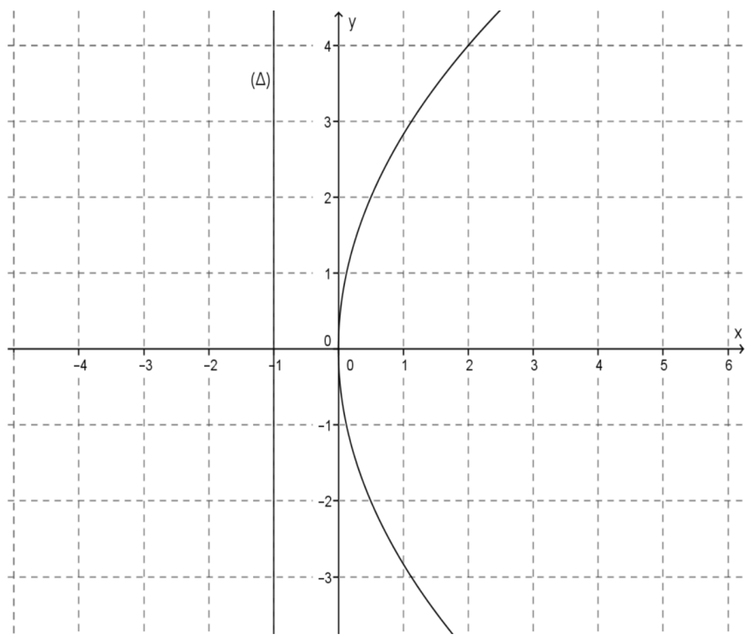
ចម្លើយ

ក.ប៉ារ៉ាបូលមានកំពូល $O(0,0)$ និងកំណុំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីសនោះ អ័ក្សអាប់ស៊ីសជាអ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូល។ សមីការនៃប៉ារ៉ាបូលមានរាង $y^2=4px$, $A(8,8)$ នៅលើប៉ារ៉ាបូលយើងបាន

$8^2=4\times p\times 8\Rightarrow p=2$

ដូច្នេះ សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ

$y^2=8x$, $F:(p,0)=(2,0)$



ខ.រកតម្លៃនៃ x_1

$B(x_1,-4)$ នៅលើប៉ារ៉ាបូលដែលមានសមីការ $y^2=8x_1\Rightarrow(-4)^2=8x_1$ ឬ $x_1=2$

3.រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូល $(2,1)$ និង កំណុំត្រង់ចំណុច $(4,1)$ ។ សង់ក្រាប ។

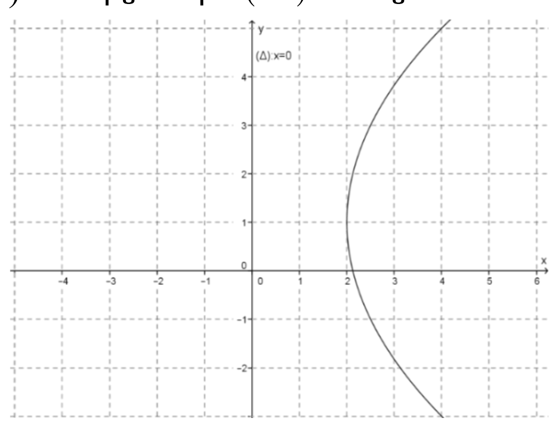
ចម្លើយ

អ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូល ជាអ័ក្សដេក

(កំពូលនិង កំណុំមានអរដោនេដូចគ្នា)

យើងប្រើសមីការ : $(y-k)^2=4p(x-h)$

កំពូល $V:(h,k)=(2,1)\Rightarrow h=2,k=1$



កំណុំ $F:(h+p,k)=(4,1)\Rightarrow h+p=4$ ឬ $p=2$ សមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូលនេះគឺ

$(y-1)^2=8(x-2)$ សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x=h-p=0$

4.រកកូអរដោនេកំពូល កំណុំ និង សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានសមីការ $(x-1)^2=4(y-3)$ ។ សង់ក្រាប ។

ចម្លើយ

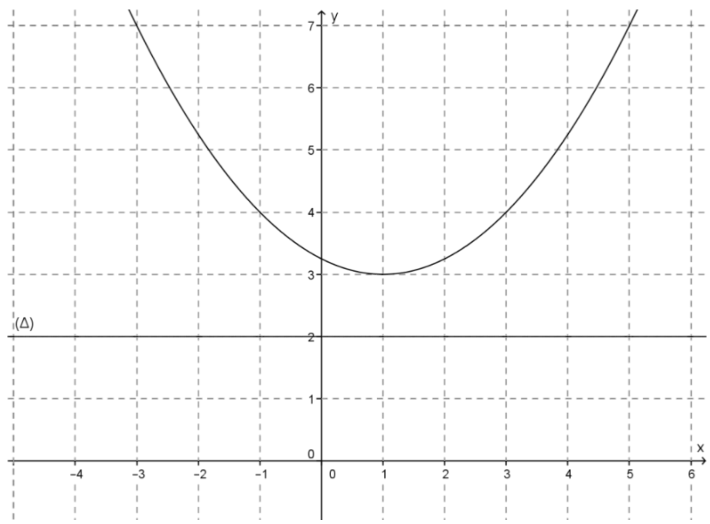
សមីការនេះមានរាង : $(x-h)^2=4p(y-k)$ ដែលមានកំណុំមានកូ អរដោនេ $(h,k+p)$ កំពូល (h,k) និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិសមានសមីការ $y=k-p$ ដោយប្រៀបធៀប $(x-1)^2=4(y-3)$ និងសមីការខាងលើយើងបាន $h=1,k=3,p=1$

កូអរដោនេកំពូល $(h,k)=(1,3)$

កូអរដោនេកំណុំ $(h,k+p)=(1,4)$

សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស

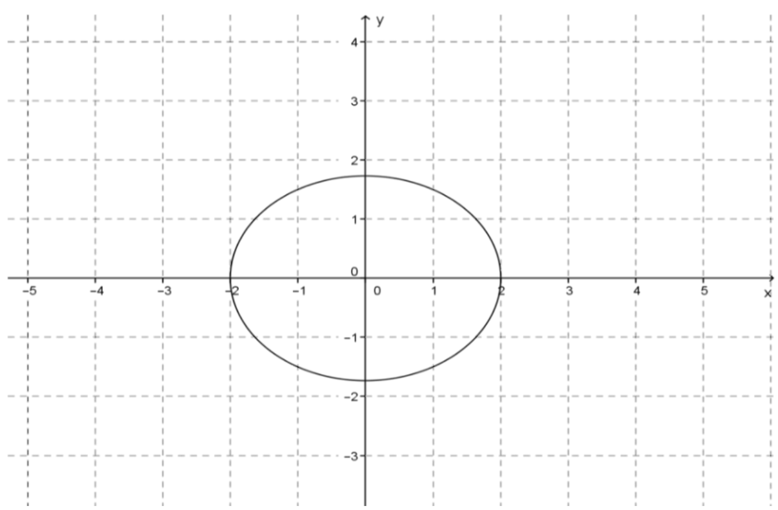
$y=k-p=3-1=2$



5. រកសមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមានកំណុំមួយជាចំណុច $(1,0)$ និង ចំណុចកំពូលពីរមានកូអរដោនេ $(-2,0)$ និង $(2,0)$ រួចសង់អេលីបនោះ ។

ចម្លើយ

ដោយកំពូលជាចំណុច $(-2,0)$ និង $(2,0)$ នោះផ្ចិតនៃអេលីបគឺគល់អ័ក្ស $O(0,0)$ ហើយអ័ក្សធំជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស។



$(a,0)=(2,0)\Rightarrow a=2$

$(c,0)=(1,0)\Rightarrow c=1$

$c^2=a^2-b^2$ ឬ $b^2=a^2-c^2=4-1=3$

អេលីបមានសមីការ : $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

6.គេឲ្យសមីការ $36x^2+4y^2=36$

ក. បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សធំ,អ័ក្សតូច,កូអរដោនេនៃកំពូល ទាំងពីរ និង កូអរដោនេនៃកំណុំទាំងពីរនៃអេលីប។

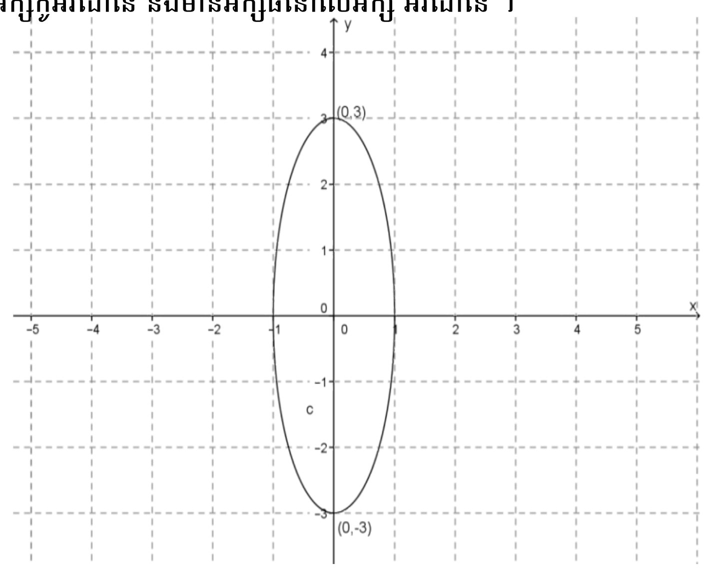
ខ. សង់អេលីបនោះ។

ចម្លើយ

ក. យើងចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការដោយ 36

យើងបាន $\dfrac{36x^2}{36}+\dfrac{4y^2}{36}=1$ ឬ $\dfrac{x^2}{1^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ វាមានរាង $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1,\ a>b>0$

ជាសមីការអេលីប ដែលមានផ្ចិតជាគល់ អ័ក្សកូអរដោនេ និងមានអ័ក្សធំនៅលើអ័ក្ស អរដោនេ ។



តាមសមីការនេះ យើងទាញបាន

$a=3$ និង $b=1$ ប្រវែងអ័ក្សធំ

$2a=2\times3=6$ និង ប្រវែងអ័ក្សតូច

$2b=2\times1=2$ កំពូលទាំងពីរមាន

កូអរដោនេ $(0,3)$ និង $(0,-3)$

យើងបាន $c^2=a^2-b^2=3^2-1^2=8$

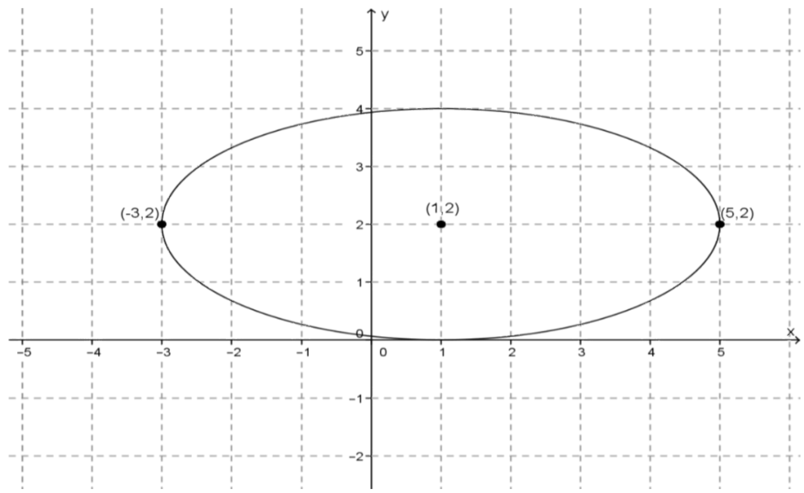
$c=2\sqrt{2}$, កំណុំទាំងពីរមានកូអរដោនេ $\left(0,2\sqrt{2}\right)$ និង $\left(0,-2\sqrt{2}\right)$

ខ.សង់អេលីបដែលមានសមីការ $36x^2+4y^2=36$

7. រកសមីការនៃអេលីបដែលមានកំពូលទាំងពីរជាចំណុច $(-3,2)$ និង $(5,2)$ និង មាន

អ័ក្សតូចមានប្រវែង 4 ឯកតា ។ សង់អេលីប ។

ចម្លើយ



កំពូលទាំងពីរស្ថិតនៅលើអ័ក្សដេកនោះអេលីបមានសមីការស្តង់ដា

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

ដោយផ្ចិតនៃអេលីបជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ភ្ជាប់កំពូលទាំងពីរនោះគេបានកូអរដោនេនៃផ្ចិតអេលីប :

$$\left(h=\frac{5+(-3)}{2},k=\frac{2+2}{2}\right) \text{ ឬ } (h=1,k=2)$$

ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a=\sqrt{(5-(-3))^2+(2-2)^2}=\sqrt{8^2}=8$

ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b=4\Rightarrow b=2$

ដូច្នេះ សមីការស្តង់ដានៃអេលីបគឺ $\frac{(x-1)^2}{4^2}+\frac{(y-2)^2}{2^2}=1$ ឬ $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$

8. គេមានសមីការ $x^2-4y^2=16$

ក. បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអ៊ីពែបូល។

កំណត់កូអរដោនេកំពូល និង កូអរដោនេកំណុំ។

ខ. រកអាស៊ីមតូត។

គ.សង់អ៊ីពែបូល។

ចម្លើយ

ក.គេមាន $x^2-4y^2=16$ យើងចែកអង្គទាំងពីរដោយ 16

យើងបាន $\frac{x^2}{16}-\frac{4y^2}{16}=1$ ឬ $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$

យើងបាន $a=4, b=2$

កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរគឺ $(4,0)$ និង $(-4,0)$

$c^2=a^2+b^2=16+4=20$ យើងបាន $c=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

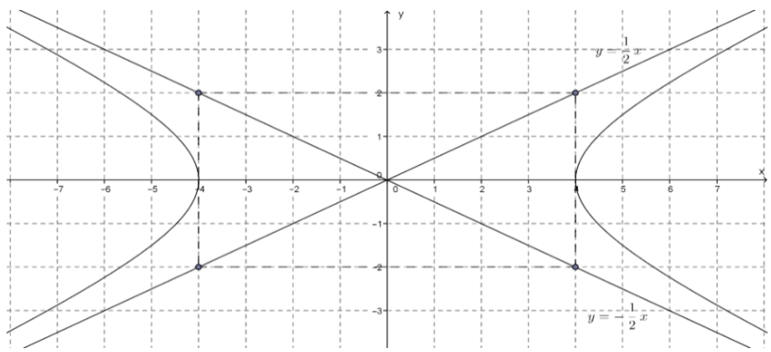
កូអរដោនេនៃកំណុំទាំងពីរគឺ $\left(2\sqrt{5},0\right)$ និង $\left(-2\sqrt{5},0\right)$

ខ.សមីការអាស៊ីមតូត

$y=\frac{b}{a}x$ និង $y=-\frac{b}{a}x$

ដូច្នេះ $y=\frac{1}{2}x$ និង $y=-\frac{1}{2}x$

គ.សង់អ៊ីពែបូល



ដើម្បីសង់អ៊ីពែបូលគេ ដៅកំពូល និង គូសចតុកោណកែងដែលមានបណ្តោយ 8ឯកតា និងទទឹងប្រវែង4ឯកតាហើយផ្ចិតនៅគល់អ័ក្សកូអរដោនេ។ រួចយើងគូសអាស៊ីមតូតដោយបន្លាយអង្កត់ទ្រូងនៃចតុកោណកែងនេះ។ រួចយើងគូសអ៊ីពែបូល ។

9.គេឲ្យសមីការ $16y^2-4x^2=36$

ក.បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអ៊ីពែបូល។

កំណត់កូអរដោនេនៃកំពូល និង កំណុំរបស់អ៊ីពែបូល។

ខ.រកសមីការអាស៊ីមតូតនៃអ៊ីពែបូល។

គ.សង់អ៊ីពែបូលនោះ។

ចម្លើយ

ក. យើងចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការ $16y^2-4x^2=36$ ដោយ 36

យើងបាន $\frac{16y^2}{36}-\frac{4x^2}{36}=1$ ឬ $\frac{4y^2}{9}-\frac{x^2}{9}=1$ ឬ $\frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}-\frac{x^2}{3^2}=1$

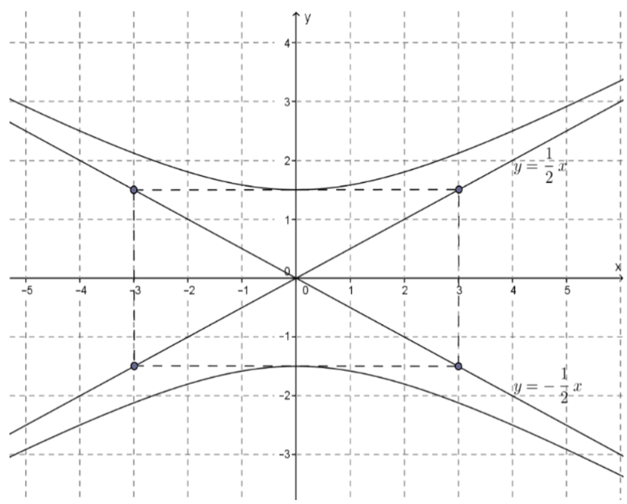
ដូច្នេះវាមានរាង $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ ដែលជាសមីការអ៊ីពែបូលមានអ័ក្សទទឹងនៅលើអ័ក្ស

អរដោនេ យើងបាន $a=\frac{3}{2}, b=3$ កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរគឺ $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ និង $\left(0,-\frac{3}{2}\right)$

$$c^2=a^2+b^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+3^2=\frac{9}{4}+9=\frac{45}{4}=\frac{9}{4}\times 5$$

$c=\frac{3}{2}\sqrt{5}$ កូអរដោនេនៃកំណុំគឺ $\left(0,\frac{3}{2}\sqrt{5}\right)$ និង $\left(0,-\frac{3}{2}\sqrt{5}\right)$

ខ.សមីការអាស៊ីមតូត



$$y=\frac{a}{b}x=\frac{\frac{3}{2}}{3}x=\frac{1}{2}x \quad \text{ឬ} \quad y=\frac{1}{2}x$$

$$y=-\frac{a}{b}x=-\frac{\frac{3}{2}}{3}x=-\frac{1}{2}x \quad \text{ឬ} \quad y=-\frac{1}{2}x$$

គ.ដើម្បីសង់អ៊ីពែបូល

យើងដៅកំពូលហើយ

គូសចតុកោណកែង

ដែលមានបណ្តោយ 6 ឯកតា និង ទទឹង3ឯកតាហើយមាន ផ្ចិតនៅគល់អ័ក្សកូអរដោនេ។គូសអង្កត់ទ្រូង

និង បន្លាយអង្កត់ទ្រូងទាំងពីរយើងបានអាស៊ីមតូតទាំងពីររបស់អ៊ីពែបូលនោះ។

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

I.មេរៀនសង្ខេប

1.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី1

និយមន័យ : សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី 1 មេគុណថេរអូម៉ូសែន

(អង្គទី 2 ស្មើសូន្យ) ជាសមីការដែលមានរាងទូទៅ $y'+ay=0$ (a ជាចំនួនថេរ)។

ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y=Ae^{-ax}$ ដែល A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន។

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី 1 មេគុណថេរ
មិនអូម៉ូសែន $y'+ay=p(x), p(x)\neq 0$ គេត្រូវ :

- រកអនុគមន៍ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'+ay=0$ តាងដោយ y_c
- រកអនុគមន៍ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y'+ay=p(x)$ តាងដោយ y_p
- ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'+ay=p(x)$ គឺអនុគមន៍ y ដែល : $y=y_c+y_p$ ។

វិធីបម្រែបម្រួលថេរ : ដើម្បីដោះស្រាយសមីការ $y'+ay=p(x)$ $(E), p(x)\neq 0$

នោះគេត្រូវ :

- រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'+ay=0$ គឺ $y=Ae^{-ax}$ (A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន)
- ក្នុងចម្លើយ $y=Ae^{-ax}$ ជំនួសចំនួនថេរ A ដោយអនុគមន៍ $A(x)$
- ពី $y=A(x)e^{-ax}$ ទាញរក y' រួចយក y និង y' ជំនួសក្នុងសមីការ $y'+ay=p(x)$
  ដើម្បីទាញរក $A(x)$ គេបាន :

$$y=A(x)e^{-ax}$$
$$y'=A'(x)e^{-ax}-aA(x)e^{-ax}$$
$$(E): A'(x)e^{-ax}-aA(x)e^{-ax}+aA(x)e^{-ax}=p(x)$$
$$A'(x)e^{-ax}=p(x)$$
$$A'(x)=e^{ax}p(x)$$
$$A(x)=\int e^{ax}p(x)dx+c$$, c ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

ដូច្នេះ $y=e^{-ax}\left[\int e^{ax}p(x)dx+c\right]$

ចម្លើយទូទៅនៃ (E) គឺ $y=ce^{-ax}+e^{-ax}\int e^{ax}p(x)dx$

ដែល $y_c=ce^{-ax}$ និង $y_p=e^{-ax}\int e^{ax}p(x)dx$ ។

2.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី 2

និយមន័យ : សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី 2 អូម៉ូសែន និងមានមេគុណថេរ ជាសមីការដែលអាចសរសេរជារាងទូទៅ $ay''+by'+cy=0$ ដែល a,b,c ជាចំនួនពិត និង $a\neq 0$ ។

ដំណោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី 2 អូម៉ូសែននិងមានមេគុណថេរ

ជាទូទៅ:

-សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី 2 $y''+by'+cy=0$ អាចសរសេរ ជាសមីការ $(y'-\alpha y)'-\beta(y'-\alpha y)=0$ ដែល α និង β ជាឫសនៃសមីការ សម្គាល់ $\lambda^2+b\lambda+c=0(\lambda\in\mathbb{C})$ ។

-សមីការសម្គាល់ $\lambda^2+b\lambda+c=0$ នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+by'+cy=0$ អាចមានឫស 2 ជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នា ឫមានឫសឌុបជាចំនួនពិត ឬ មានឫស 2 ជាចំនួនកុំផ្លិច។

ជាទូទៅ: -រកសមីការសម្គាល់ $\lambda^2+b\lambda+c=0$ នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+by'+cy=0$

-បើសមីការសម្គាល់មានឫស 2 ជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នា $\lambda_1=\alpha$ និង $\lambda_2=\beta$ នោះ សមីការ $y''+by'+cy=0$ មានចម្លើយទូទៅ $y=Ae^{\alpha x}+Be^{\beta x}$ ដែល A និង B ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

- $y_1=e^{\alpha x}, y_2=e^{\beta x}$ ជាចម្លើយគោល។

ជាទូទៅ: បើសមីការសម្គាល់ $\lambda^2+b\lambda+c=0$ នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+by'+cy=0$ មានឫសឌុបជាចំនួនពិតគឺ $\lambda_1=\lambda_2=\alpha$ នោះគេបានចម្លើយ ទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនេះគឺ $y=Axe^{\alpha x}+Be^{\alpha x}$ ដែល A និង B ជា ចំនួនថេរណាមួយក៏បាន។ $y_1=xe^{\alpha x}$ និង $y_2=e^{\alpha x}$ ជាចម្លើយគោល។

ជាទូទៅ: បើសមីការសម្គាល់ $\lambda^2+b\lambda+c=0$ នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+by'+cy=0$ មានឫសកុំផ្លិច $\lambda_1=\alpha+i\beta$ និង $\lambda_2=\alpha-i\beta$ នោះគេបានចម្លើយទូទៅនៃ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនេះគឺ $y=e^{\alpha x}(C\cos\beta x+D\sin\beta x)$ ដែល C និង

D ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន។

របៀបដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី 2 មិនអូម៉ូសែន

$y''+by'+cy=p(x)$, $p(x)\neq 0$

- ស្វែងរកចម្លើយពិសេសមិនអូម៉ូសែន តាងដោយ y_p នៃសមីការ $y''+by'+cy=p(x)$ ដែល y_p មានទម្រង់ដូចអង្គទី 2 $p(x)$
- រកចម្លើយទូទៅតាងដោយ y_c នៃសមីការលីនេអ៊ែលំដាប់ទី 2 អូម៉ូសែន $y''+by'+cy=0$
- គេបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការលីនេអ៊ែលំដាប់ទី 2 មិនអូម៉ូសែន ជាផលបូកនៃ y_c និង y_p គឺ

  $y=y_c+y_p$ ។

II.លំហាត់គំរូ

កំណត់សម្គាល់ : អ្នកសិក្សាត្រូវខំប្រឹងដោះស្រាយលំហាត់ដោយខ្លួនឯង ចំណែកចម្លើយសម្រាប់តែផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

1.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'-y=0$

ក្នុងលក្ខខណ្ឌ $y(0)=1$; $y(0)=-1$; $y(2)=e^2$ ។

ចម្លើយ

ចម្លើយទូទៅនៃ $y'-y=0$ យើងបាន $\dfrac{dy}{dx}=y$ ឬ $\dfrac{dy}{y}=dx$

ដូច្នេះ $\ln|y|=x+c$ ឬ $y=Ae^x$ (A ជាចំនួនថេរណាមួយ)

$y=Ae^x$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y^{'}-y=0$

- ក្នុងលក្ខខណ្ឌ $y(0)=1\Rightarrow Ae^0=1$ ឬ $A=1$

  $y=e^x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y'-y=0$ ក្នុងលក្ខខណ្ឌ $y(0)=1$
- ក្នុងលក្ខខណ្ឌ $y(0)=-1\Rightarrow Ae^0=-1$ ឬ $A=-1$

  $y=-e^x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y'-y=0$ ក្នុងលក្ខខណ្ឌ $y(0)=-1$
- ក្នុងលក្ខខណ្ឌ $y(2)=e^2\Rightarrow Ae^2=e^2$ ឬ $A=1$

  $y=e^x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y'-y=0$ ក្នុងលក្ខខណ្ឌ $y(2)=e^2$

2.ដោះស្រាយសមីការ $y'-2y=0$ ក្នុងលក្ខខណ្ឌ $y(2)=e^2$

ចម្លើយទូទៅនៃ $y'-2y=0$ យើងបាន $y'=2y$ ឬ $\frac{dy}{dx}=2y$

$\frac{dy}{y}=2dx$ ឬ $\ln|y|=2x+c$

ដូច្នេះ $y=Ae^{2x}$ (A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន) ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ

$y'-2y=0$ ។ ក្នុងលក្ខខណ្ឌ $y(2)=e^2$ យើងបាន $Ae^{2\times2}=e^2 \Rightarrow A=e^{-2}$

ដូច្នេះ $y=e^{-2}\cdot e^{2x}=e^{(2x-2)}$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y'-2y=0$ ក្នុងលក្ខខណ្ឌ

$y(2)=e^2$ ។

3.ដោះស្រាយសមីការ $y'+2y=2x+3$ (E)

ចម្លើយ

- ដោះស្រាយសមីការ $y'+2y=0$ ឬ $y'=-2y$

  $\frac{dy}{dx}=-2y$ នាំឲ្យ $\frac{dy}{y}=-2dx$

  $\ln|y|=-2x+c$ យើងបាន $y_c=Ae^{-2x}$ $(A=\pm e^c)$

- រកចម្លើយពិសេសនៃ (E) $y_p=ax+b$, $y'_p=a$

  (E) $y'_p+2y_p=2x+3$

  $a+2(ax+b)=2x+3$

  $2ax+a+2b=2x+3$

  គេបាន $\begin{cases}2a=2\\a+2b=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$

  ដូច្នេះ $y_p=x+1$

- ដូច្នេះ ចម្លើយទូទៅរបស់ (E) គឺ $y=y_c+y_p=Ae^{-2x}+x+1$

4.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''-3y'-4y=0$ (E) ។

រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E) បើខ្សែកោងអនុគមន៍ចម្លើយកាត់តាមចំនុច

$(0,1)$ ហើយបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំនុចនេះមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើនឹង 9 ។

ចម្លើយ

- ដោះស្រាយសមីការ (E): $y''-3y'-4y=0$

សមីការ (E) មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$; $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$

ដូច្នេះ ចម្លើយទូទៅរបស់សសមីការ (E) គឺ $y = Ae^{-x} + Be^{4x}$ A និង B ជាចំនួនថេរណាមួយ។

- រកចម្លើយពិសេសដែលខ្សែកោងតាង $y = Ae^{-x} + Be^{4x}$ កាត់តាមចំនុច $(x = 0, y = 1)$ យើងបាន $1 = Ae^0 + Be^0$ ឬ $A + B = 1$ មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះទៅខ្សែកោងត្រង់ $(x = 0, y = 1)$ ស្មើ 9 យើងបាន $y' = -Ae^{-x} + 4Be^{4x}$

  ជំនួស $x = 0$ យើងបាន $-A + 4B = 9$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -A + 4B = 9 \end{cases}$$

$$5B = 10$$

ឬ $B = 2$ និង $A = -1$

ដូច្នេះ $y = -e^{-x} + 2e^{4x}$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) ក្នុងលក្ខខណ្ឌខ្សែកោងកាត់តាមចំនុច $(x = 0, y = 1)$ និង មេគុណប្រាប់ទិសរបស់បន្ទាត់ប៉ះទៅខ្សែកោងត្រង់ចំនុចនេះស្មើ 9 ។

ប្រូបាប

I.មេរៀនសង្ខេប

- ព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណនៃ A និង B ជាប្រសព្វនៃព្រឹត្តិការណ៍ A និងព្រឹត្តិការណ៍ B ។
- ព្រឹត្តិការណ៍ផលបូកនៃ A និង B ជាប្រជុំនៃព្រឹត្តិការណ៍ A និងព្រឹត្តិការណ៍ B ។
- ព្រឹត្តិការណ៍ B និងព្រឹត្តិការណ៍ D ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុង កាលណាព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណនៃ B និង D ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមាន : $B\cap D=\varnothing$
- ព្រឹត្តិការណ៍ 2 ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយគ្នា ឬជាព្រឹត្តិការណ៍បំពេញគ្នា កាលណាព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណនៃព្រឹត្តិការណ៍ទាំង 2 ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមាន និងព្រឹត្តិការណ៍ផលបូកនៃព្រឹត្តិការណ៍ទាំង 2 ជាព្រឹត្តិការណ៍ប្រាកដ :

  $A\cap \bar{A}=\varnothing, A\cup \bar{A}=S$
- គេបានព្រឹត្តិការណ៍ 2 ផ្ទុយគ្នាជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុង។
- ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយ ជាផលធៀបនៃចំនួនករណីស្រប

  និងចំនួនករណីអាច $P(A) = \dfrac{\text{ចំនួនករណីស្រប } n(A)}{\text{ចំនួនករណីអាច } n(S)}$
- ប្រូបាបនៃលំហសំណាក S ស្មើនឹង 1: $P(S) = 1$
- ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមានស្មើស្មើនឹង 0 : $P(\emptyset) = 0$
- ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយក្នុងលំហសំណាកជាចំនួនដែលនៅចន្លោះ [0,1]

  $0 \le P(A) \le 1$
- ប្រូបាបជាអនុវត្តន៍ ដែលកំណត់ពីលំហសំណាក S ទៅចន្លោះ [0,1]

  $P : S \to [0,1]$
- ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ A និង B គឺ :

  $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$ បើ A និង B មិនទាក់ទងគ្នា

  $P(A\cap B) = P(A)\times P(B$ ដែល A កើតមុន) បើ A និង B ទាក់ទងគ្នា
- ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផលបូក A និង B គឺ: $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

  $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$ បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុង
- ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយ A គឺ: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ 2 ក្នុងលំហសំណាកមួយដែល $P(A)\neq 0$ នោះប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌនៃព្រឹត្តិការណ៍ B ដោយដឹងថា A គឺ: $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$
- គេអាចគណនាបានដូចគ្នា $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ $\quad (P(B)\neq 0)$
- តាមរូបមន្តនេះគេអាចទាញបានប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ A និង B

  $P(A\cap B) = P(A)\times P(B|A) = P(B)\times P(A|B)$

  A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ 2 ដែលមានប្រូបាបមិនសូន្យ
- គេថាព្រឹត្តិការណ៍ A និង ព្រឹត្តិការណ៍ B មិនអាស្រ័យគ្នាកាលណាព្រឹត្តិការណ៍ទាំង 2 ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌណាមួយក្នុងចំណោមលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម :

1. $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ ឬ

2. $P(A|B)=P(A)$ ឬ

3. $P(B|A)=P(B)$

- គេថាព្រឹត្តិការណ៍ A និងព្រឹត្តិការណ៍ B អាស្រ័យគ្នាកាលណា $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$

រូបមន្តប្រូបាសរុប : $P(B)=\sum_{i=1}^{n}\left[P(B|A_i)\times P(A_i)\right]$

ទ្រឹស្តីបទបៃយេស : $P(A_k|B)=\dfrac{P(B|A_k)\times P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n}\left[P(B|A_i)\times P(A_i)\right]}$

II.លំហាត់គំរូ

កំណត់សម្គាល់ : អ្នកសិក្សាត្រូវខំប្រឹងដោះស្រាយលំហាត់ដោយខ្លួនឯង ចំណែកចម្លើយសម្រាប់តែផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

1.ក្នុងស្បោងមួយមានឃ្លីពណ៌ក្រហម 4 ឃ្លីពណ៌ខ្មៅចំនួន 3 និងឃ្លីពណ៌សចំនួន 1 ។

គេចាប់យកម្តងឃ្លីចំនួន 3 ។ គេសន្និដ្ឋានថាប្រូបាបដែលចាប់បានយកឃ្លីនីមួយៗជាសមប្រូបាប។

គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តការណ៍ខាងក្រោម :

ក. ″ យ៉ាងតិចមានឃ្លីពីរពណ៌ក្រហម ″

ខ. ″ យ៉ាងតិចមានឃ្លីពីរពណ៌ដូចគ្នា ″

គ. ″ ឃ្លីទាំងបីមានពណ៌ខុសៗគ្នា ″

ចម្លើយ :

យើងមានឃ្លីសរុបចំនួន $4+3+1=8$

សំណុំ S នៃផ្នែកដែលមានធាតុបីរបស់សំណុំឃ្លីក្នុងស្បោងមាន

$$n(S)=C(8,3)=\frac{8!}{3!(8-3)!}=8\times 7=56$$

ក.ព្រឹត្តការណ៍ A យ៉ាងតិចមានឃ្លីពីរពណ៌ក្រហមគឺជាប្រជុំនៃព្រឹត្តការណ៍

A_1 : " មានឃ្លីពីរពណ៌ក្រហមនិងមួយទៀតមិនក្រហម″

A_2 : ″ ឃ្លីទាំងបីពណ៌ក្រហម ″

ដោយ $A_1\cap A_2=\varnothing$

$$P(A_1)=\frac{C(4,2)\times C(4,1)}{C(8,3)};P(A_2)=\frac{C(4,3)}{C(8,3)}$$

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{C(4,2)\times C(4,1)}{C(8,3)}+\frac{C(4,3)}{C(8,3)}$$

$$=\frac{\frac{4!}{2!\times 2!}\times\frac{4!}{3!}}{56}+\frac{\frac{4!}{3!}}{56}=\frac{3\times 2\times 4}{56}+\frac{4}{56}=\frac{28}{56}=\frac{1}{2}$$

ខ.ព្រឹត្តិការណ៍ B ″ យ៉ាងតិចមានឃ្លីពីរពណ៌ដូចគ្នា ″

ព្រឹត្តិការណ៍ B អាចចែកជាពីរករណី

A_1 : " ឃ្លីពីរពណ៌ក្រហម និងមួយទៀតមិនក្រហម ″

យើងបាន $P(A_1)=\frac{C(4,2)\times C(4,1)}{C(8,3)}$

A_2 : " ឃ្លីទាំងបីពណ៌ក្រហម ″

$$P(A_2)=\frac{C(4,3)}{C(8,3)}$$

A_3 : " ឃ្លីពីរពណ៌ខ្មៅនិងមួយទៀតមិនខ្មៅ ″

$$P(A_3)=\frac{C(3,2)\times C(5,1)}{C(8,3)}$$

A_4 : " ឃ្លីទាំងបីខ្មៅ ″

$$P(A_4)=\frac{1}{C(8,3)}$$

ដោយ A_1,A_2,A_3,A_4 មិនចុះសម្រុងគ្នាពីរៗគេបាន

$$P(B)=\frac{C(4,2)\times C(4,1)+C(4,3)+C(3,2)\times C(5,1)+1}{C(8,3)}=\frac{44}{56}=\frac{11}{14}$$

គ.ព្រឹត្តិការណ៍ C "មានឃ្លីទាំងបីពណ៌ខុសៗគ្នា″

ព្រឹត្តិការណ៍នេះ យើងយកឃ្លីមួយក្នុងពណ៌នីមួយៗគឺយើងយកឃ្លីក្រហម 1 ក្នុង 4 ជំរើស, ឃ្លីខ្មៅ 1 ក្នុង 3 ជំរើស, ឃ្លីស 1 ក្នុង 1ជំរើស

$$P(C)=\frac{4\times3\times1}{C(8,3)}=\frac{12}{56}=\frac{3}{14}$$

2.ក្នុងថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្ស 30 នាក់ដែលក្នុងនោះ 14 នាក់ជានារី។ ក្នុងចំណោម សិស្សទាំងនោះ នារី 8 នាក់ និង បុរស 4 នាក់ជាសិស្សនៅក្នុងអន្តេវាសិកដ្ឋាន។ សិស្សដទៃទៀតនៅក្រៅអន្តេវាសិកដ្ឋាន។ គេជ្រើសរើសសិស្សម្នាក់ក្នុងថ្នាក់នេះ ដោយចៃដន្យ។ កំណត់ព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម :

A : " សិស្សដែលជ្រើសរើសជាសិស្សនៅក្នុងអន្តេវាសិកដ្ឋាន "

B : " សិស្សដែលជ្រើសរើសជាសិស្សបុរស "

ក.–គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តការណ៍ A រួចរកប្រូបាបនៃព្រឹត្តការណ៍ B

ខ.–គណនាប្រូបាប $P(B|A)$ មានន័យថាប្រូបាបនៃការជ្រើសរើសសិស្សបុរស ដោយដឹងថាជាសិស្សនៅក្នុងអន្តេវាសិកដ្ឋាន។

–កំណត់ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ $A\cap B$

ចម្លើយ

ក.យើងអាចសង្ខេបសម្មតិកម្មខាងលើក្នុងតារាងខាងក្រោម

សិស្ស	ចំនួននារី	ចំនួនបុរស	សរុប
ក្នុងអន្តេវាសិកដ្ឋាន	8	4	12
ក្រៅអន្តេវាសិកដ្ឋាន	6	12	18
សរុប	14	16	30

វិបាក $P(A)=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$

ដោយមាននារី 14 ដូច្នេះ សិស្សបុរសមាន 16

$$P(B)=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$$

ខ.–សិស្សបុរសចំនួន 4 នាក់នៅក្នុងអន្តេវាសិកដ្ឋាន

$$P(B|A)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

-កំណត់ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ $A\cap B$

$$P(A\cap B)=P(B|A)\times P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$$

3.ក្នុងល្បែងបៀរ 32 សន្លឹកគេដកយកសន្លឹកបៀមួយសន្លឹកដោយចៃដន្យ។

គេកំណត់ព្រឹត្តិការណ៍ :

- A : " សន្លឹកបៀរដែលដកយកបានជារូបបេះដូង "
- B : " សន្លឹកបៀរដែលដកយកបានជាអាត់ "
- C : " សន្លឹកបៀរដែលដកយកបានជាសន្លឹកអាត់ និង ក្រហម "

  រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A,B,C ។

ចម្លើយ $n(S)=32$

- រកប្រូបាប $P(A)=\dfrac{C(8,1)}{32}=\dfrac{8}{32}=\dfrac{1}{4}$
- រកប្រូបាប $P(B)=\dfrac{C(4,1)}{32}=\dfrac{4}{32}=\dfrac{1}{8}$
- រកប្រូបាប $P(C)$

  សន្លឹកបៀក្រហមមាន 16 សន្លឹកដូច្នេះប្រូបាបដើម្បីបានសន្លឹកបៀក្រហមគឺ $\dfrac{C(16,1)}{32}=\dfrac{1}{2}$

  $P(C)=\dfrac{1}{8}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{16}$

4.នៅក្នុងថុងមួយគេមានប៊ូល 12 ដែលគេសរសេរលេខពី 1 ដល់ 12។ គេចាប់យកប៊ូល 3

ចេញពីថុងព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម :

- A : " គេចាប់បានប៊ូលទាំងបីមានលេខសុទ្ធតែចែកដាច់នឹង 3 "
- B : " គេចាប់បានប៊ូលតែមួយគត់មានលេខចែកដាច់នឹង 3 "
- C : " គេចាប់បានប៊ូលមានលេខតាមលំដាប់កើនជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d=3$ "
- D : " គេចាប់បានប៊ូលមានលេខតាមលំដាប់បង្កើតបានស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q=\dfrac{1}{2}$ "

  ចម្លើយ: យើងបានសំណុំលេខលើប៊ូល $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ សំណុំនៃផ្នែកដែលមានបីប៊ូល

  S មាន $n(S)=C(12,3)=\dfrac{12!}{3!(12-3)!}=\dfrac{12!}{3!9!}=\dfrac{12\times11\times10}{6}=220$

- ពហុគុណនៃ 3 គឺ $\{3,6,9,12\}$ ដើម្បីអាចបានព្រឹត្តិការណ៍ A យើងយកប៊ូលបីក្នុងចំណោមប៊ូល $3,6,9,12$

ដូច្នេះ $P(A)=\dfrac{C(4,3)}{C(12,3)}=\dfrac{4}{220}=\dfrac{1}{55}$

- រកប្រូបាប $P(B)$ គឺយើងយកប៊ូលមួយក្នុងចំណោមប៊ូលដែលមានលេខ $3,6,9,12$ និងយកពីរទៀតក្នុងចំណោម ៨ ផ្សេងទៀត។

  $P(B)=\dfrac{C(4,1)\times C(8,2)}{C(12,3)}=\dfrac{112}{220}=\dfrac{28}{55}$

- រកប្រូបាប $P(C)$

  គេរៀបជាស្វ៊ីតដែលមានផលសងរួម $d=3$

  $\{1,4,7\},\{2,5,8\},\{3,6,9\},\{4,7,10\},\{5,8,11\},\{6,9,12\}$

  ដូច្នេះ $P(C)=\dfrac{6}{220}=\dfrac{3}{110}$

- រកប្រូបាប $P(D)$

  a,b,c ជាចំនួនតាមលំដាប់នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានផលធៀបរួម $q=\dfrac{1}{2}$ ។

  គេបាន $b=\dfrac{1}{2}a,\mathrm{c}=\dfrac{1}{2}b=\dfrac{1}{4}a$

  a,b,c ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែល a ត្រូវតែជាពហុគុណនៃ 4

  ដូច្នេះ a អាចយកតម្លៃ $4,8$ ឬ 12 ។

  យើងបានស្វ៊ីតបីគឺ: $\{4,2,1\},\{8,4,2\},\{12,6,3\}$

  វិបាក: $P(D)=\dfrac{3}{220}$ ។

ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ និង អនុវត្តន៍

I.មេរៀនសង្ខេប

- បើ $\vec{u} = u_1\,\vec{\imath} + u_2\,\vec{\jmath} + u_3\,\vec{k}$ និង $\vec{v} = v_1\,\vec{\imath} + v_2\,\vec{\jmath} + v_3\,\vec{k}$ ជាវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ។ ផលគុណនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ គឺជាវ៉ិចទ័រកំណត់ដោយ

  $\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\,\vec{\imath} - (u_1v_3 - u_3v_1)\,\vec{\jmath} + (u_1v_2 - u_2v_1)\,\vec{k}$ ។

- បើ $\vec{u}$ **,** $\vec{v}$ និង $\vec{w}$ ជាវ៉ិចទ័រនៅក្នុងលំហ និង $\boldsymbol{c}$ ជាចំនួនពិត នោះគេបាន :

  ក. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$ ខ. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

  គ. $c(\vec{u} \times \vec{v}) = (c\,\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (c\,\vec{v})$ ឃ. $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$

  ង. $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ ច. $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ ។

- បើ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រមិនសូន្យនៅក្នុងលំហ និងតាង θ ជាមុំរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ នោះគេបាន :

  ក. $\vec{u} \times \vec{v}$ អរតូកូណាល់ទៅនឹង $\vec{u}$ ផង និង $\vec{v}$ ផង។

  ខ. $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\theta$

  គ. បើ $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ នោះ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិទ័រកូលីនេអ៊ែនឹងគ្នា ។

  ឃ.$|\vec{u} \times \vec{v}|$ =ផ្ទៃក្រឡារបស់ប្រលេឡូក្រាមដែលសង់លើវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។

  ង. $\frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$ =ផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណដែលសង់លើវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។

- គេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u}, \vec{v}$ និង $\vec{w}$ នៅក្នុងលំហ ។ ផលគុណចម្រុះនៃ $\vec{u}, \vec{v}$ និង $\vec{w}$ តាមលំដាប់គឺជាចំនួនពិតដែលកំណត់ដោយ $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ ។

- បើគេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath} + u_3\vec{k}$, $\vec{v} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}$

  និង $\vec{w} = w_1\vec{\imath} + w_2\vec{\jmath} + w_3\vec{k}$ នោះ $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$។

- V ជាមាឌរបស់ប្រលេពីប៉ែតដែលសង់លើវ៉ិចទ័រ $\vec{u}, \vec{v}$ និង $\vec{w}$ គឺ

  $V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$ និង w ជាមាឌរបស់តេត្រាអ៊ែតគឺ : $w = \frac{|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|}{6}$

  បានន័យថា យកមាឌរបស់ប្រលេពីប៉ែតចែកនឹង 6 ។

- សមីការប៉ារ៉ាមែតនៃបន្ទាត់ L កាត់តាមចំណុច $P(x_0, y_0, z_0)$ ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ

  $\vec{v} = (a, b, c)$ គឺ $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$, $z = z_0 + ct$

  ឬ $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

- សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ L គឺ : $\boldsymbol{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}$ ។

- សមីការស្តង់ដានៃប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច $P(x_0, y_0, z_0)$ និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់

  $\vec{n} = (a, b, c)$ គឺ $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ ។

- សមីការទូទៅនៃប្លង់គឺ : $ax + by + cz + d = 0$ (ដែល $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$)។

- មុំរវាងប្លង់ពីរគឺ : $\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$ ដែល $\vec{n}_1$ និង $\vec{n}_2$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ ។
- ចម្ងាយរវាងចំណុច $P(x_1, y_1, z_1)$ និង $Q(x_2, y_2, z_2)$ នៅក្នុងលំហគឺ
  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ។
- សមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែផ្ចិត $C(x_0, y_0, z_0)$ កាំ r គឺ $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$
- សមីការទូទៅនៃស្វ៊ែ : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + k = 0, k = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2$
- ចម្ងាយពីចំណុច Q ទៅប្លង់ α ដែលចំណុច Q មិននៅក្នុងប្លង់ α កំណត់ដោយ
  $D = \frac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$ ឬ $D = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ដែល P ជាចំណុចនៅក្នុងប្លង់ និង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ ។
- ចម្ងាយពីចំណុច Q ទៅបន្ទាត់ L ក្នុងលំហកំណត់ដោយ $D = \frac{|\overrightarrow{PQ}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}$ ដែល $\vec{u}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ L និង P ជាចំណុចនៅលើបន្ទាត់ L ។

II.លំហាត់គំរូ

កំណត់សម្គាល់ : អ្នកសិក្សាត្រូវខំប្រឹងដោះស្រាយលំហាត់ដោយខ្លួនឯង ចំណែកចម្លើយសម្រាប់តែផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

1.គេអោយវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$; $\vec{v} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}$ ។ រកវ៉ិចទ័រ

ក. $\vec{u} \times \vec{v}$ ខ. $\vec{v} \times \vec{u}$ គ. $\vec{u} \times \vec{u}$

ចម្លើយ

ក. $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= (-3 - 4)\vec{\imath} - (3 - 4)\vec{\jmath} + (-2 - 2)\vec{k} = -7\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 4\vec{k}$

ខ.$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= (4 + 3)\vec{\imath} - (4 - 3)\vec{\jmath} + (2 + 2)\vec{k} = 7\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 4\vec{k}$

គ. $\vec{u} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= (2 - 2)\vec{\imath} - (-2 + 2)\vec{\jmath} + (-1 + 1)\vec{k} = \vec{0}$

2.រកវ៉ិចទ័រឯកតាដែលអរត្តូកូណាល់ទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$

ចម្លើយ : ផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{u} \times \vec{v}$ អរត្តូកូណាល់ទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ គឺ

$$\vec{u}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=(1-2)\vec{\imath}-(-1-4)\vec{\jmath}+(1+2)\vec{k}=-\vec{\imath}+5\vec{\jmath}+3\vec{k}$$

ដោយ $|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{(-1)^2+5^2+3^2}=\sqrt{1+25+9}=\sqrt{35}$

នោះយើងបានវ៉ិចទ័រឯកតាដែលអរត្តូកូណាល់ទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ គឺ

$$\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=-\frac{1}{\sqrt{35}}\vec{\imath}+\frac{5}{\sqrt{35}}\vec{\jmath}+\frac{3}{\sqrt{35}}\vec{k}$$

វ៉ិចទ័រនេះជាវ៉ិចទ័រឯកតាពីព្រោះ $\left|\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}\right|=\sqrt{\frac{1}{35}+\frac{25}{35}+\frac{9}{35}}=1$

3.គេមានចំណុច $A(-1,2,3)$; $B(1,-6,-1)$; $C(2,2,2)$ នៅក្នុងលំហប្រដាប់ដោយ

តម្រុយយអរត្តូណរម៉ាល់$(0,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ ។ គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។

ចម្លើយ

យើងបាន $\overrightarrow{AB}=2\vec{\imath}-8\vec{\jmath}-4\vec{k}$

$\overrightarrow{AC}=3\vec{\imath}-\vec{k}$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 2 & -8 & -4\\ 3 & 0 & -1\end{vmatrix}=8\vec{\imath}-(-2+12)\vec{\jmath}+24\vec{k}=8\vec{\imath}-10\vec{\jmath}+24\vec{k}$$

4.នៅក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតំរុយអរត្តូណរម៉ាល់ $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ គេមានចំណុច

$A(1,3,4)$; $B(2,5,6)$; $C(3,4,3)$; $D(2,2,1)$ ។

បង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម រួចរកផ្ទៃក្រឡានៃប្រលេឡូក្រាមនេះ ។

ចម្លើយ : ជ្រុងឈមនៃចតុកោណនេះមានវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{DC}$

$A(1,3,4)$; $B(2,5,6)$ វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+2\vec{k}$

$C(3,4,3)$; $D(2,2,1)$ វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{DC}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+2\vec{k}$

យើងបាន $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

ដូច្នេះ ចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាមដែលមាន $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AD}$ ជ្រុងជាប់ ។

$A(1,3,4)$; $D(2,2,1)$ វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AD}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}-3\vec{k}$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -3\end{vmatrix}=(-6+2)\vec{\imath}-(-3-2)\vec{\jmath}+(-1-2)\vec{k}$$

$= -4\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - 3\vec{k}$

យើងបានក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាមគឺ

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-3)^2}$

$= \sqrt{16 + 25 + 9} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា

5.គណនាមាឌប្រលេពីប៉ែតដែលមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u}, \vec{v}$ និង $\vec{w}$ ជាវិមាត្រ :

$\vec{u} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{v} = 5\vec{\jmath} + 5\vec{k}$, $\vec{w} = 4\vec{\imath} + 4\vec{k}$

ចម្លើយ : យើងដឹងថាមាឌរបស់ប្រលេពីប៉ែត $V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(20) - 3(-20) + 1(-20) = 20 + 60 - 20 = 60$$

ដូច្នេះ $V = 60$ ឯកតាមាឌ

6.រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ កាត់តាមចំណុច $A(0,0,0)$ ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ

$\vec{u} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$ រួចរកសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់នេះ ។

ចម្លើយ : យើងបាន $x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $z_0 = 0$

$\vec{u} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k} = (1,2,3) = (a, b, c)$ ឬ $a = 1 ; b = 2 ; c = 3$

ដូច្នេះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់នេះគឺ

$$\begin{cases} x = x_0 + at = 0 + t = t \\ y = y_0 + bt = 0 + 2t = 2t \\ z = z_0 + ct = 0 + 3t = 3t \end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់នេះគឺ $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ ។

7.រកសមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុចខាងក្រោម :

$A(1,2,3)$; $B(3,2,1)$ និង $C(-1,-2,2)$

ចម្លើយ: ដើម្បីរកសមីការប្លង់គេត្រូវរកវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = (a, b, c)$ ។

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = (a, b, c)$ ជាផលគុណនៃ វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ ដែល :

$A(1,2,3)$; $B(3,2,1)$ យើងបាន $\overrightarrow{AB} = (3 - 1, 2 - 2, 1 - 3) = (2, 0, -2)$

$A(1,2,3)$; $C(-1,-2,2)$ យើងបាន $\overrightarrow{AC} = (-1-1, -2-2, 2-3) = (-2,-4,-1)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -8\vec{i} - (-2-4)\vec{j} + (-8)\vec{k} = -8\vec{i} + 6\vec{j} - 8\vec{k}$$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ មានប្លង់តែមួយគត់កាត់តាមចំណុច A , B , C ដែលវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់

$\vec{n} = (-8,6,-8)$ ។

ដូច្នេះ សមីការប្លង់កាត់តាមចំណុច $A(1,2,3)$

គឺ $a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

$-8(x-1) + 6(y-2) - 8(z-3) = 0$

ឬ $-8x + 8 + 6y - 12 - 8z + 24 = 0$

ឬ $-8x + 6y - 8z + 20 = 0$.